SERIE UNIVERSITARIA
PATRIA
Teoría, ejemplos
y problemas

CD
interactivo en
esta edición

ECUACIONES diferenciales

Ana Elizabeth García
David Reich

GRUPO EDITORIAL PATRIA

ECUACIONES DIFERENCIALES

GRUPO EDITORIAL PATRIA

ECUACIONES DIFERENCIALES

Ana Elizabeth García Hernández
David Reich
Instituto Politécnico Nacional

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinación editorial: Estela Delfín Ramírez
Producción: Gerardo Briones González
Diseño de interiores y portada: Juan Bernardo Rosado Solís
Ilustraciones: Adrian Zamorategui Berber
Fotografías: © Thinkstockphoto
Diagramación: Gustavo Vargas M. y Jorge Martínez J.

Revisión técnica: Javier León Cárdenas
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Ecuaciones diferenciales

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-907-4

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Agradecimientos

Gracias a Dios por todas sus bendiciones
y alegrías de cada momento de mi vida

Ana Elizabeth

Agradezco a Dios por la vida y sus bendiciones,
a mi madre Elsa por impulsarme a superarme en todo momento,
a mis hijos por ser mi fuente de inspiración y a mi esposa por su apoyo.

David

Presentación

Sin duda alguna, las ecuaciones diferenciales son de gran utilidad en muchas áreas de las matemáticas, las ciencias, la economía y la ingeniería, lo que significa, en otras palabras, que existen numerosos fenómenos y situaciones de la vida diaria, que, a pesar de ser diferentes entre ellos en su evolución a lo largo del tiempo, al momento de analizarse comparten, desde el punto de vista técnico, una característica común: todos estos pueden modelarse mediante una importante herramienta matemática: las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, las leyes que determinan: la economía, el movimiento de un péndulo, el estudio de poblaciones, el análisis de la producción, entre otros fenómenos cotidianos.

El principal objetivo de este libro es ofrecer al lector una visión completa del vasto campo de las aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales y demostrar la utilidad de las herramientas de cálculo y álgebra aprendidas en cursos anteriores. Además, busca que los estudiantes aprendan a distinguir tres etapas para la solución de problemas en matemáticas:

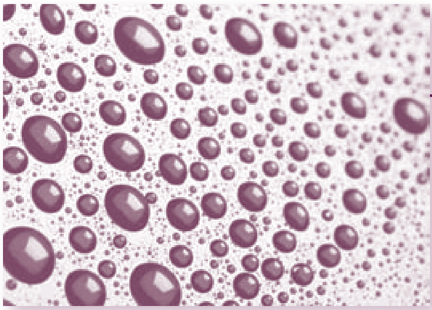
- La formulación matemática del problema.
- La resolución del problema matemático.
- La interpretación de los resultados obtenidos.

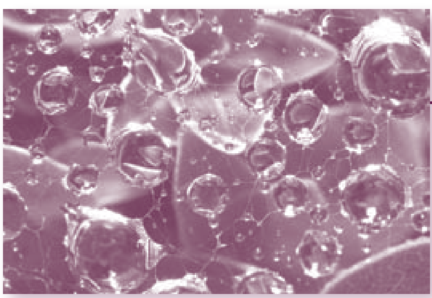
El texto es totalmente flexible; entre sus principales ventajas destaca el hecho de que el alumno y/o el profesor pueden elegir diferentes estrategias de uso de la información del libro y ni uno ni otro se ven forzados a estudiar los contenidos unidad por unidad; es decir, es posible ajustarlo a las propias necesidades de cada lector.

Los problemas resueltos, que se incluyen a lo largo de todas las unidades, ofrecen al alumno la posibilidad de entender, paso a paso, la solución a dichos problemas, proporcionando las herramientas necesarias para resolver, él mismo, los problemas que se encuentran al final de cada unidad.

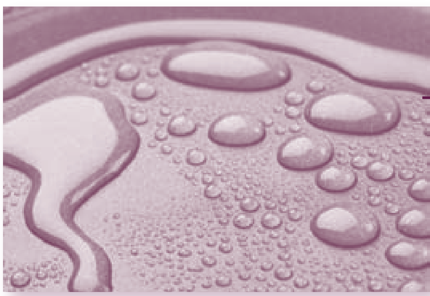
La obra se divide en cinco unidades. La unidad 1 está dedicada a la **modelación matemática usando ecuaciones diferenciales**; mientras que en la unidad 2 se expone el tema de **solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden**; por su parte, en la unidad 3 se presenta el tema de las **ecuaciones diferenciales lineales de orden superior**; la unidad 4 está dedicada al estudio de la **solución de ecuaciones con series de potencias**, y, por último, en la unidad 5 se aborda el tema de la **solución de ecuaciones con transformadas de Laplace**. Además se incluye un Apéndice: **Formulario de matemáticas.**

Contenido

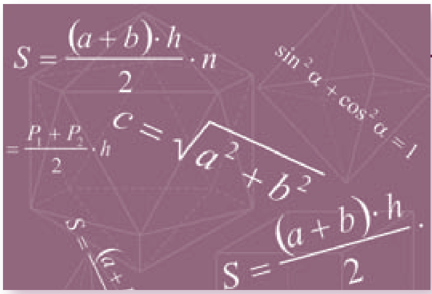




UNIDAD 4 Solución de ecuaciones con series de potencias 113

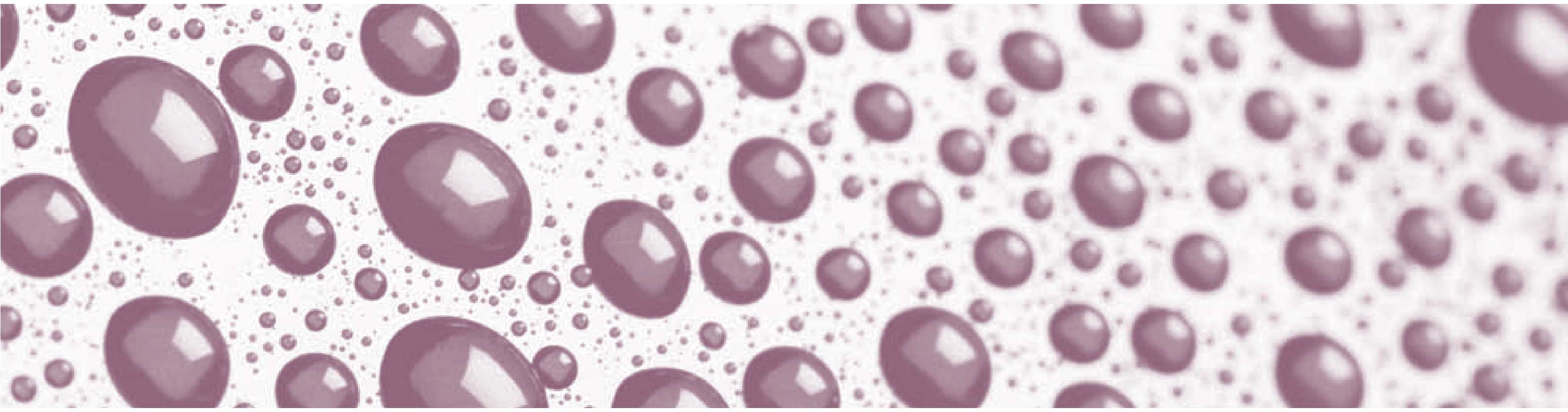


UNIDAD 5 Solución de ecuaciones con transformadas de Laplace 155



APÉNDICE 1 Formulario de matemáticas 193

UNIDAD 1



Modelación matemática usando ecuaciones diferenciales

OBJETIVOS

- Diferenciar los tipos de ecuaciones diferenciales.
- Conocer y aplicar el método de Euler en la solución de problemas.
- Comprobar que una función es solución de una ecuación diferencial dada.
- Construir las isóclinas de una ecuación diferencial.
- Determinar soluciones particulares a partir de la solución general de una ecuación diferencial.
- Modelar con un problema de valor inicial un problema dinámico.

¿QUÉ SABES?

- ¿Qué es una ecuación diferencial?
- ¿Por qué son útiles las ecuaciones diferenciales?
- ¿Cuántos tipos de ecuaciones diferenciales conoces?
- ¿Para qué sirven las ecuaciones diferenciales en economía?
- ¿Por qué son importantes las ecuaciones diferenciales en la arqueología contemporánea?
- ¿Cómo aplicas las ecuaciones diferenciales en ingeniería?

1.1 Introducción

En toda actividad científica contemporánea es imperioso describir los fenómenos naturales en el lenguaje de las matemáticas. En este capítulo se analizan fenómenos modelados matemáticamente mediante el uso de ecuaciones diferenciales.

También, se estudia la terminología empleada en estas ecuaciones, así como una variedad amplia de aplicaciones de las mismas.

1.2 Conceptos básicos y terminología empleada en las ecuaciones diferenciales

Una de las formas de modelar fenómenos naturales es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos $G = G(x, y, z, t)$.

A su vez, una de las formas para modelar los cambios de esta función, G, de la posición (x, y, z) y del tiempo t, es a través de una ecuación en la cual están implicadas la función $G = G(x, y, z, t)$ y sus derivadas.

A continuación se presenta un ejemplo de caída libre de un cuerpo.

Cuando un cuerpo cae en caída libre, actúan sobre él la fuerza de la gravedad y, por ende, la aceleración de la gravedad; entonces, su ecuación de movimiento está dada por:

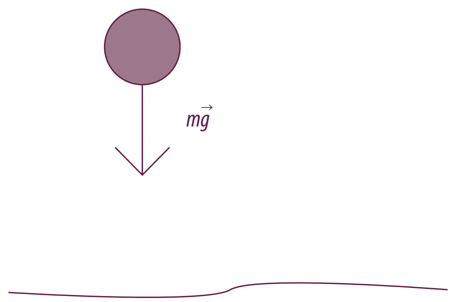


Figura 1.1

La ecuación de movimiento del objeto es:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

Por tanto, en el eje vertical, la ecuación es:

$$-mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow g = \frac{dv}{dt}$$

Sabemos que $g = 9.8$ m/s^2 es una constante, pero la velocidad es una función del tiempo. En esta ecuación se está derivando con respecto al tiempo, por lo que es una ecuación diferencial. Entonces, ¿qué es una ecuación diferencial?

> Una **ecuación diferencial** es una igualdad que contiene diferenciales de la variable dependiente y de la variable independiente. Asimismo, es una igualdad que contiene una o más derivadas.

Entonces, $-g = \frac{dv}{dt}$ es una ecuación diferencial; la velocidad depende del tiempo. Por tanto, la solución es $v(t)$, donde v es la variable dependiente y t la variable independiente:

$$-g = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = -gdt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -g\int_0^t dt \Rightarrow v(t) = v_0 - gt$$

Alerta

La variable dependiente es la que se está derivando y la variable independiente es aquélla con respecto a la que se deriva.

Por ejemplo, en la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 5x = 0$, la variable dependiente es x y la variable independiente es t.

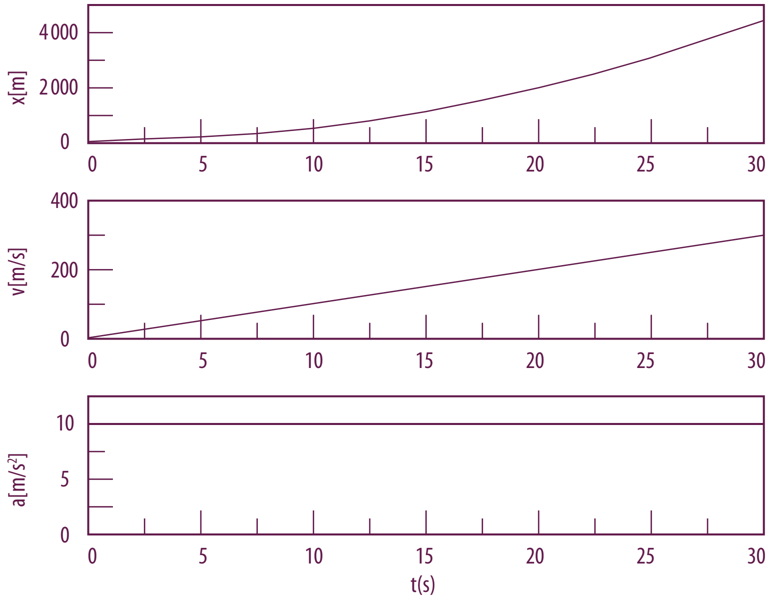


Figura 1.2 Posición, velocidad y aceleración en caída libre.

Generalizando, podemos decir que una ecuación diferencial es de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(x, y)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y'' = f(x, y, y')$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dt^n} = y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n)})$$

En estos casos, y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

Regresando al ejemplo del cuerpo en caída libre; entonces, al resolver la ecuación de movimiento encontramos la velocidad con respecto al tiempo, es decir cómo varía la velocidad con el tiempo; esto es, la velocidad cambia con respecto al tiempo:

$$v(t) = v_0 - gt$$

En general, ¿para qué sirven las ecuaciones diferenciales? La respuesta general es para **modelar problemas de cambio**. A través de una ecuación diferencial se pueden modelar cambios de cualquier variable, por ejemplo, de posición, de temperatura, de población, de capital; en fin, de cualquier cambio que se presente en la vida cotidiana.

1.3 Clasificación de las ecuaciones diferenciales de acuerdo con su tipo

Las ecuaciones diferenciales que contienen **derivadas** de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se llaman **ecuaciones diferenciales ordinarias**. Por ejemplo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + 5(\theta - \pi) = 0$$

Las ecuaciones diferenciales que contienen **derivadas parciales** de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes se llaman **ecuaciones diferenciales parciales**. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

El siguiente diagrama ilustra esta clasificación:

Figura 1.3

Clasificación de acuerdo con el orden

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada más alta contenida en ella.

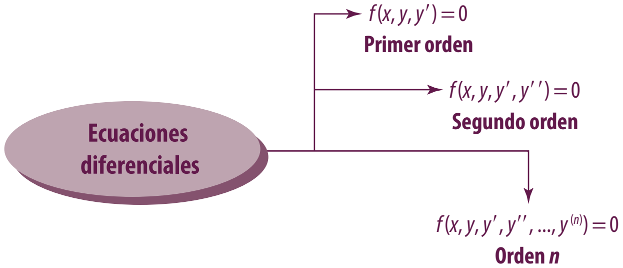


Figura 1.4

Clasificación de acuerdo con el grado

El grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada más alta, siempre y cuando la ecuación diferencial esté dada de forma polinomial.

Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial lineal es aquella en la que:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado.
- Cada coeficiente de y y sus derivadas dependen solamente de la variable independiente x, o es una constante, es decir tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

Ecuación diferencial ordinaria no lineal

Este tipo de ecuaciones diferenciales no cumple las propiedades anteriores. Observa los ejemplos y sus características:

- La ecuación diferencial $y'' + xyy' = \text{sen } x$ es una **ecuación diferencial ordinaria**, de orden 2, grado 1, no lineal.
- La ecuación diferencial $c^2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = A$ es una **ecuación diferencial parcial**, de orden 2, grado 1.
- La ecuación diferencial $x^3yy''' - x^2yy'' + y = 0$ es una **ecuación diferencial ordinaria**, de orden 3, grado 1, lineal.

- La ecuación diferencial $y'' + 2x^3y' - (x-1)y = xy^3$ es una **ecuación diferencial ordinaria**, de orden 2, grado 1, no lineal.
- La ecuación diferencial $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y}$ es una **ecuación diferencial parcial**, orden 2, grado 1.

1.4 Solución de las ecuaciones diferenciales

La **solución** de una ecuación diferencial es una función $y = \phi(x)$, determinada en el intervalo (a, b), con sus derivadas sucesivas que satisfacen dicha ecuación. Esto significa que al sustituir dicha función y sus derivadas en la ecuación diferencial se obtiene una identidad de x en el intervalo (a, b).

Por ejemplo, la función $y = \text{sen } x + \cos x$ es solución de la ecuación diferencial $y' = \cos x - \text{sen } x$; sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\cos x - \text{sen } x = \cos x - \text{sen } x$$

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se llama **curva integral de la ecuación**.

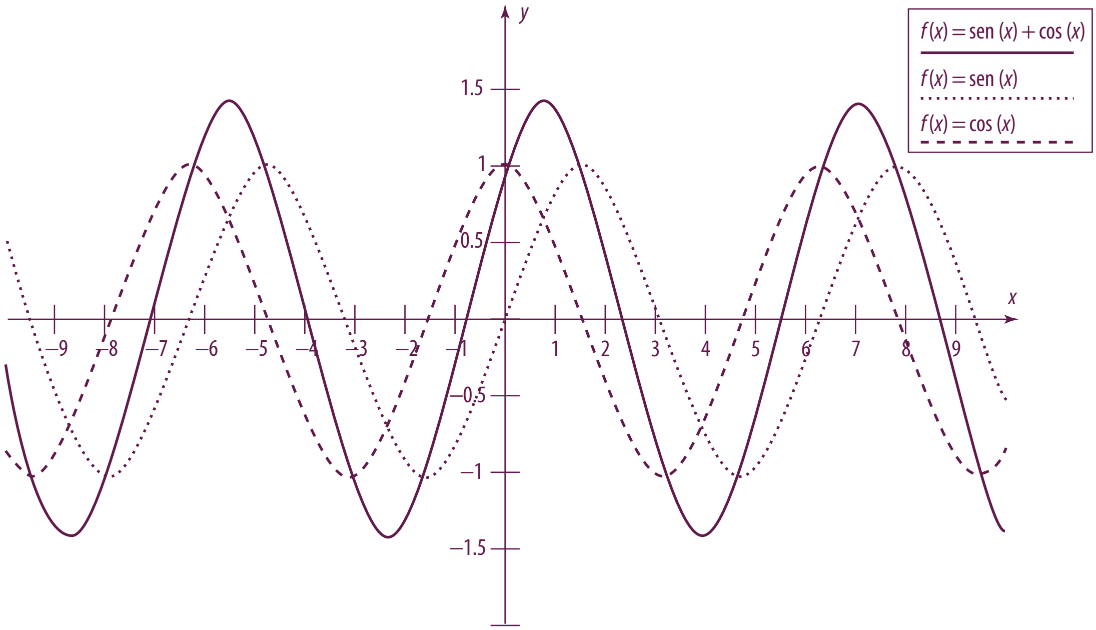


Figura 1.5

Curva solución y curvas que la componen.

Problema resuelto

Sea la función $y = 2x^3 - 2x^2 - 13x + 22$, comprobar que esta es la solución de la ecuación diferencial $y'' = 12x - 4$.

Solución

Para la comprobación se toman la primera y la segunda derivadas de y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 - 2x^2 - 13x + 22) = (6x^2 - 4x - 13)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(6x^2 - 4x - 13) = 12x - 4$$

Así, con la segunda derivada se obtiene precisamente la ecuación diferencial.

Existencia y unicidad

Cuando un problema de valor inicial modela matemáticamente una situación física, la existencia y unicidad de la solución es de suma importancia, pues, se espera tener una solución, debido a que físicamente algo debe suceder. Por otra parte, se supone que la solución sea única, ya que si se repite el experimento en condiciones idénticas, se deben esperar los mismos resultados, siempre y cuando el modelo sea determinístico. Por tanto, al considerar un problema de valor inicial es natural preguntarse por los siguientes conceptos:

1. **Existencia**: ¿Existirá una solución al problema?
2. **Unicidad**: ¿En caso de que exista solución, será única?
3. **Determinación**: ¿En caso de que exista solución, como la determinamos?

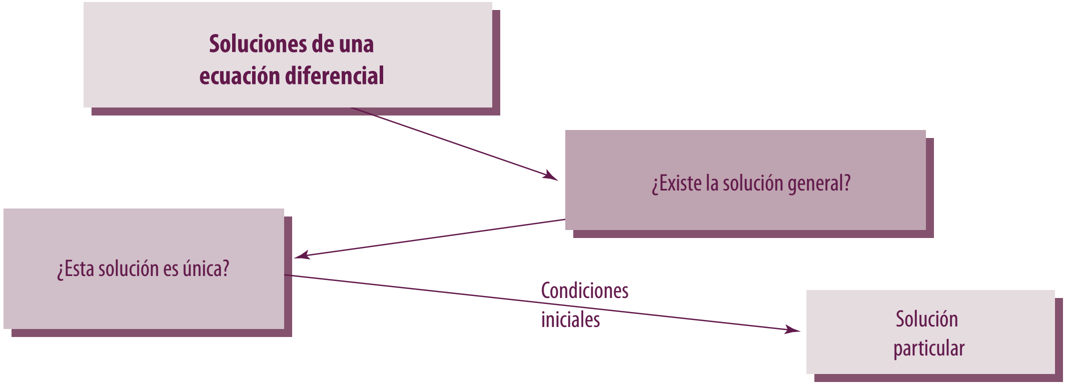


Figura 1.6

Entonces, para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$y' = f(x, y)$$

Por tanto, hay que determinar una función $y = \phi(x)$ que satisfaga la ecuación anterior con una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

El Teorema de Cauchy solo garantiza la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas condiciones restrictivas:

Teorema de Cauchy

Si $f(x, y)$ es analítica en un dominio que contiene al punto (x_0, y_0), existe una, y solo una, función analítica $\phi(x)$ que satisface la ecuación:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

Se dice que una función es analítica si es derivable un número infinito de veces; una condición menos exigente para que exista solución y sea única (aunque no necesariamente analítica), es que se satisfaga una condición de Lipschitz.

Ahora, supongamos que tenemos una función $f(x, y)$ definida en un dominio del plano xy. Se dice que la función $f(x, y)$ satisface una condición de Lipschitz (respecto de y) en el dominio si existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq M\left|y_1 - y_2\right|$$

para todos los puntos (x, y_1) y (x, y_2) que pertenezcan al dominio. Entonces, a la constante M se llama constante de Lipschitz.

Una condición suficiente para que se pueda verificar una condición de Lipschitz es que exista $\partial f/\partial y$ y esté acotada en el dominio, D. Si es así, efectivamente, se satisface una condición de Lipschitz (respecto de y) en el dominio, D y M, que está dada por:

$$M = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|$$

En efecto:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f(x, \xi)}{\partial y} \quad \text{donde} \quad \xi \in (y_1, y_2)$$

Ahora, supongamos el dominio D definido del siguiente modo:

$$|x| \le a; \ |y| \le b$$

y la función $f(x, y)$ dada por:

$$f(x, y) = y^2$$

como $\partial f/\partial y$ existe y está acotada en el dominio D:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$$

$$M = \sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| = 2b$$

Entonces:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \le 2b|y_1 - y_2|$$

Sin embargo, aunque esta condición (sobre la derivada parcial) es una condición suficiente, no es necesaria, como se ve en el ejemplo siguiente:

$$f(x, y) = x|y| \ \text{en} \ |x| \le a; \ |y| \le b$$

Que cumple una condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| \le |x||y_1 - y_2| \le a|y_1 - y_2|$$

a pesar de que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ no existe en el punto $(x, 0)$.

Problema resuelto

¿Existe la solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{y^2}$ con $y(x_0) = 0$?

Solución

Entonces, si:

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$$

En los puntos $(x_0, 0)$ no se cumplen las condiciones. La función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en el eje x, por lo que no hay solución al problema de valor inicial.

Problema resuelto

Indicar la región del plano xy en donde existe la solución de la ecuación diferencial $y' = xy + e^{-y}$.

Solución

La función $f(x, y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a x y y en todos los puntos del plano xy. Por tanto, la vecindad en la que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano xy.

Alerta

Para un problema con valor inicial:

$y' = f(x, y)$ con $y(0) = y_0$

La solución existe si $f(x, y)$ es una función de valores reales y continua en una región abierta que contenga el punto.

La solución es única si $f(x, y)$ es continuamente diferenciable en la región abierta que contiene el punto.

La **solución general** de una ecuación diferencial es la función que contiene una o más constantes arbitrarias obtenidas de las integraciones sucesivas.

Problema resuelto

¿La función $y = 4x^2 + C_1x + C_2$ es la solución general de la ecuación diferencial $y'' = 8$?

Solución

Tomemos la primera derivada de y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(4x^2 + C_1x + C_2\right) = 8x + C_1$$

Ahora, tomemos la segunda derivada de y:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(8x + C_1\right) = 8$$

Problema resuelto

¿La función implícita $x^2 + y^2 = c$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = -\frac{x}{y}$?

Solución

Derivando implícitamente $x^2 + y^2 = c$, obtenemos:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

La ecuación $x^2 + y^2 = c$ representa una familia de circunferencias.

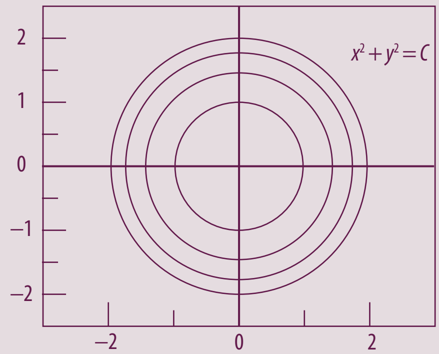


Figura 1.7

Solución implícita

La ecuación $F(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo dado I, si define una o más soluciones explícitas en I.

Problema resuelto

¿La función implícita $x + e^{xy} = 0$ es la solución general de la ecuación diferencial $1 + e^{xy}y + e^{xy}xy' = 0$?

Solución

Derivamos la ecuación $x + e^{xy} = 0$ con respecto a x:

$$1 + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$1 + e^{xy}y + xy'e^{xy} = 0$$

La cual es idéntica a la ecuación diferencial, así la función implícita sí es solución de la ecuación diferencial dada.

Soluciones particulares o problemas con valores iniciales

La solución general de una ecuación diferencial representa una familia de curvas. Con frecuencia, es necesario encontrar la solución de una ecuación diferencial dada que satisfaga una condición inicial dada; en este caso, se estará encontrando una solución particular y se dirá que se está resolviendo un problema con valores iniciales.

La **solución particular** de una ecuación diferencial es la función cuyas constantes arbitrarias tienen un valor específico que depende de las condiciones iniciales que debe satisfacer la ecuación diferencial.

Problema resuelto

La ecuación diferencial $y' + 3y = 0$ y la condición inicial $y(0) = 2$ constituyen un problema con valores iniciales. La solución general de la ecuación diferencial $y = Ce^{-3x}$; dicha función representa una familia de curvas, como se observa en la figura siguiente. Se requiere establecer cuál es la solución particular.

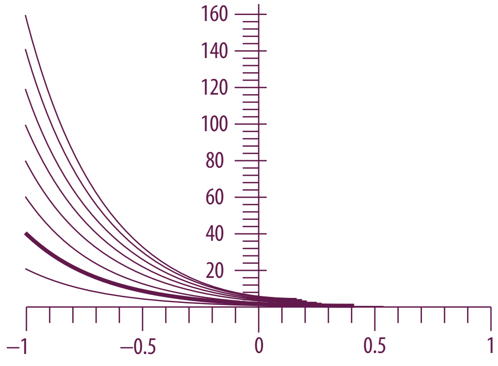


Figura 1.8

Solución

La solución particular $y = Ce^{-3x}$ debe satisfacer que $y(0) = 2$:

$$y(0) = Ce^{-3(0)} = C = 2$$

La solución particular es, por: $y = 2e^{-3x}$.

En la figura, la línea más gruesa representa la solución particular.

Problema resuelto

La ecuación diferencial $y'' + 5y + 6 = 0$ y las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ constituyen un problema con valores iniciales. Establecer la solución general y la solución particular.

Solución

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}\cos\sqrt{5}x + C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}x,$$

Esta función representa una familia de curvas:

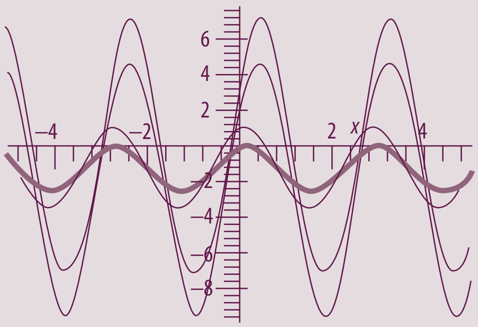


Figura 1.9

Sustituimos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, entonces:

$$y(0) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}\cos\sqrt{5}x + C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}x$$

$$y'(0) = -\frac{6\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{5}x - \sqrt{5}C_1\operatorname{sen}\sqrt{5}x + C_2\cos\sqrt{5}x$$

$$y(0) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}\cos\left(\sqrt{5}(0)\right) + C_1\cos\left(\sqrt{5}(0)\right) + C_2\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}\left(\sqrt{5}(0)\right) = 0$$

$$y(0) = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(0) = -\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(\operatorname{sen}\sqrt{5}(0)\right) - \sqrt{5}C_1\left(\operatorname{sen}\sqrt{5}(0)\right) + C_2\left(\cos\sqrt{5}(0)\right)$$

$$y'(0) = C_2 = 0$$

Problema resuelto

La función $y = \frac{1}{5}e^{2x^2}$ es la solución particular de la ecuación diferencial $y' - 4xy = 0$ con la condición inicial $y(0) = \frac{1}{5}$.

Solución

Para verificar que y es solución de la ecuación diferencial, tomemos la primera derivada de y.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}e^{2x^2}\right) = \frac{1}{5}e^{2x^2}\frac{d}{dx}(2x^2) = \frac{4x}{5}e^{2x^2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial el valor de y y de y':

$$\underbrace{\frac{4x}{5}e^{2x^2}}_{y'} - 4x\underbrace{\left(\frac{1}{5}e^{2x^2}\right)}_{y} = 0$$

La solución particular debe satisfacer la condición inicial:

$$y(0) = \frac{1}{5}$$

En este caso se tiene:

$$y(0) = \frac{1}{5}e^{2(0)^2} = \frac{1}{5}\underbrace{e^0}_{1} = \frac{1}{5}$$

En efecto, hemos demostrado que la función $y = \frac{1}{5}e^{2x^2}$ es la solución particular de la ecuación diferencial $y' - 4xy = 0$ con la condición inicial $y(0) = \frac{1}{5}$.

Problema resuelto

Encuentre una ecuación diferencial cuya solución general sea $y = ax + b$.

Solución

Derivamos a la función $y = ax + b$

$$y' = a$$

y la derivamos nuevamente

$$y'' = 0$$

Esta es la ecuación.

1.5 Curvas ortogonales

Como ya vimos, dada una ecuación diferencial, $y' = f(x, y)$, su solución general depende de una sola constante. El problema inverso es dada una familia de curvas, dependiendo de un parámetro, obtener la ecuación diferencial cuya solución sea la familia de curvas dada.

Si la familia de curvas es $f(x, y, c) = 0$, derivamos implícitamente respecto de la variable x y obtenemos la relación:

$$g(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, c) = 0$$

Entonces, de ambas ecuaciones debemos eliminar el parámetro C.

Dada una familia de curvas $f(x, y, c) = 0$, se desea encontrar otra familia $F(x, y, c) = 0$, tal que para cada curva de la primera familia que pasa por el punto (x_0, y_0) exista otra curva de la segunda familia que también pase por ese punto y sea ortogonal a ella (es decir, sus tangentes han de ser perpendiculares en (x_0, y_0)).

Esto es, si $\mu(x, y, y') = 0$ es una ecuación diferencial de $f(x, y, C) = 0$, entonces $\phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ lo es de $F(x, y, C) = 0$. A la familia de curvas $F(x, y, C) = 0$ se le llama **trayectorias ortogonales**.

Problema resuelto

Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $xy = C$.

Solución

Primero, se deriva para encontrar la ecuación diferencial de la familia:

$$xdy + ydx = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Enseguida, se obtiene la pendiente de las trayectorias ortogonales:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Por tanto, la ecuación diferencial de la familia de curvas de las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Por último, se resuelve la ecuación diferencial, para lo cual se integra:

$$-xdx = ydy \Rightarrow -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = K$$

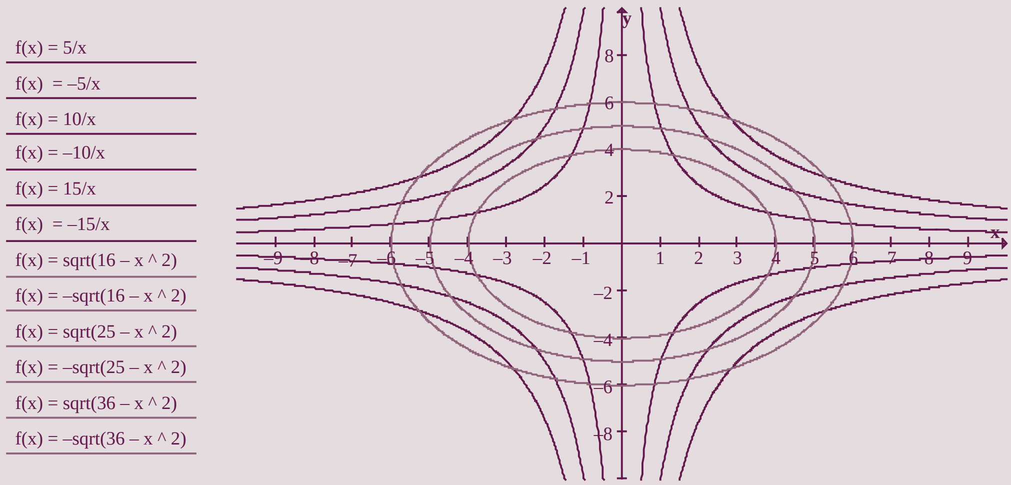


Figura 1.10

1.6 Campo direccional

Los valores de la función y', valuados en los puntos (x, y), determinan la dirección de rectas tangentes en los puntos (x, y), debido a que el valor de y' en el punto (x, y) es el valor de la pendiente de la recta tangente (véase figura 1.11).

Al conjunto de segmentos de estas rectas tangentes se le denomina ***campo direccional***.

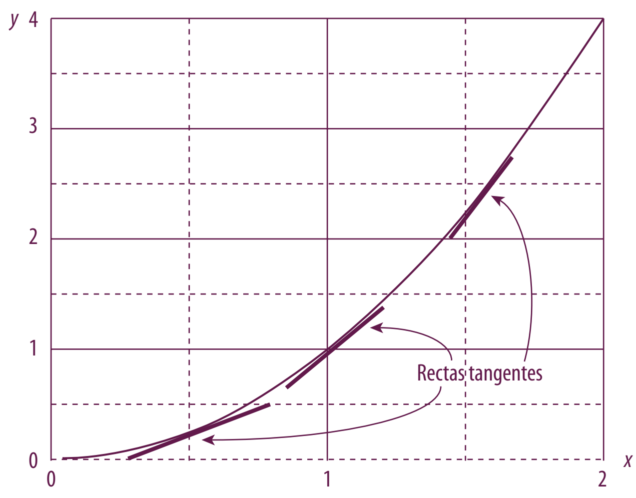


Figura 1.11

Una manera de construir de forma sistemática el campo direccional de una ecuación diferencial es llevando a cabo los pasos siguientes:

- Construir una malla en la región del plano *xy*, en donde nos interesa conocer el campo direccional.
- Evaluar y' en cada uno de los puntos de esa malla. El valor de y' es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función *y* que pasa por ese punto.
- Construir segmentos de recta con las pendientes dadas en cada uno de los puntos de la malla.

Problema resuelto

Construir el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = 5$.

Solución

- Primero, construimos una malla en los intervalos de *x*, [0, 5], y de *y*, [0, 5].

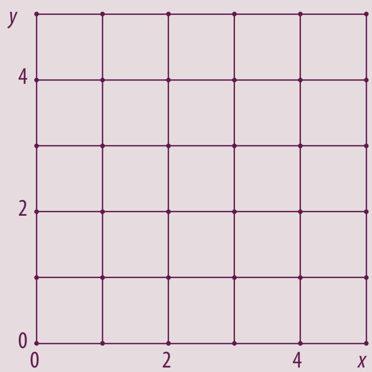


Figura 1.12

- Entonces, $y' = 5$ para todos los puntos de esta malla. Por tanto, $m = 5$ para todas las pendientes de las rectas tangentes que pasan por los puntos de la malla. Esto significa que todas las rectas tangentes hacen un ángulo de 78.69° con respecto al eje de las *x*.
- Enseguida, construimos segmentos de recta orientados a 78.69° con respecto al eje de las *x* en cada uno de los puntos de la malla.

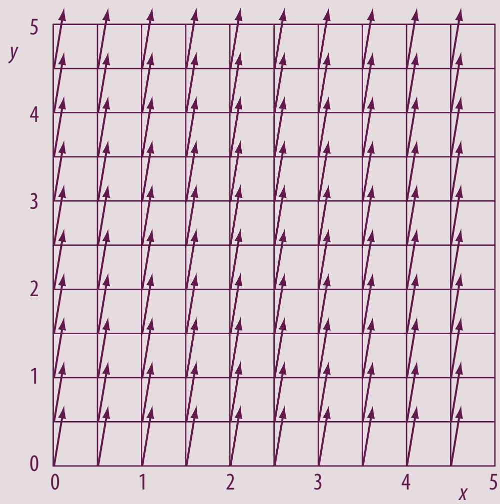


Figura 1.13

Campo direccional para la ecuación diferencial $y' = 5$.

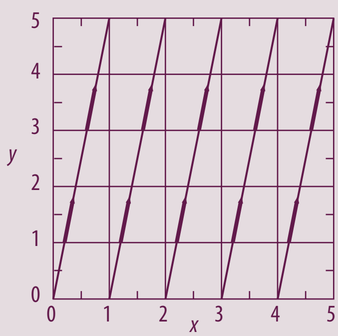


Figura 1.14

1.7 Isóclinas

Las **isóclinas** son curvas que atraviesan segmentos de pendientes iguales.

Problema resuelto

Construir el campo direccional y las isóclinas de la ecuación diferencial $y' = 2x$.

Solución

De acuerdo con el proceso explicado antes para la construcción de forma sistemática del campo direccional de una ecuación diferencial:

- Primero, construimos una malla en los intervalos de x, $[-4, 4]$ y de y, $[0, 10]$.
- Enseguida, puesto que $y' = 2x$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&x = -4,\ y' = -8 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-8) = -82.87^\circ \\
&x = -3,\ y' = -6 \Rightarrow m = -6 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-6) = -80.53^\circ \\
&x = -2,\ y' = -4 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-4) = -75.96^\circ \\
&x = -1,\ y' = -2 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-2) = -63.43^\circ \\
&x = 0,\ y' = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0) = 0^\circ \\
&x = 1,\ y' = 2 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2) = 63.43^\circ \\
&x = 2,\ y' = 4 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4) = 75.96^\circ \\
&x = 3,\ y' = 6 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(6) = 80.53^\circ \\
&x = 4,\ y' = 8 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(8) = 82.87^\circ
\end{aligned}
$$

- Por último, construimos segmentos de recta orientados, con la pendiente indicada en cada uno de los puntos de la malla.

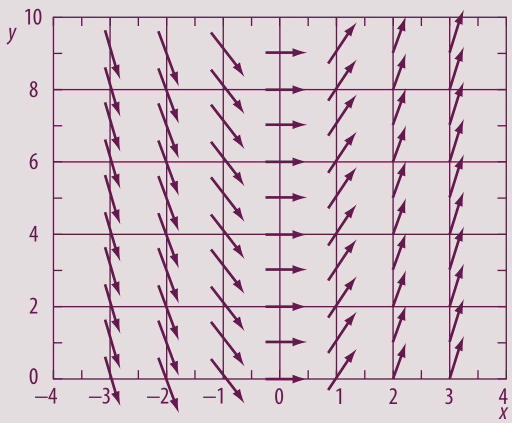


Figura 1.15

Las rectas $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, son las isóclinas.

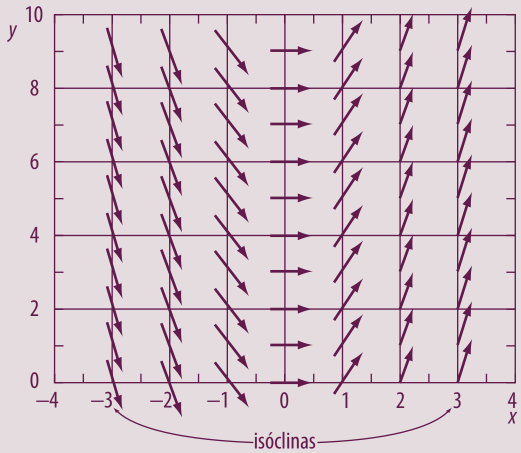


Figura 1.16

En la siguiente gráfica se muestra la familia de curvas solución.

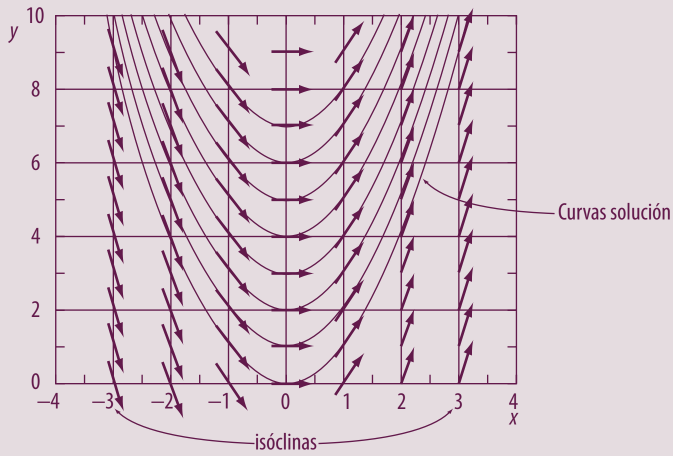


Figura 1.17

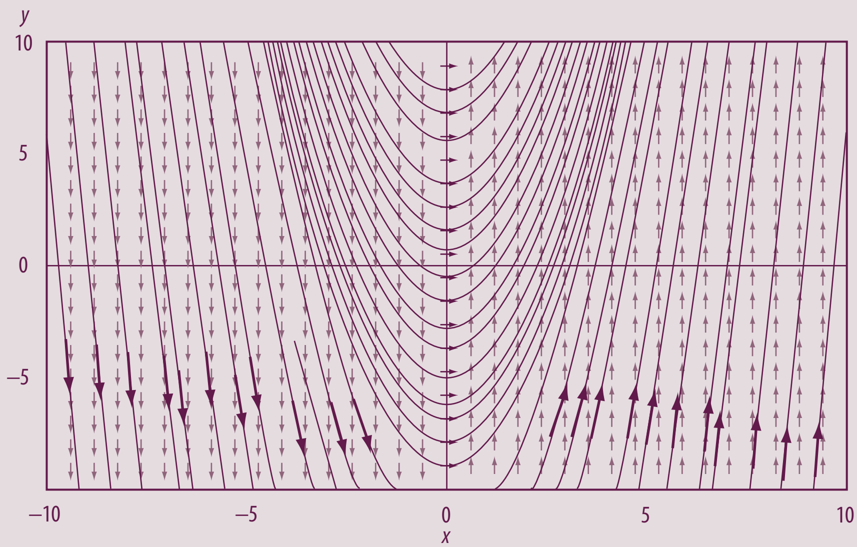


Figura 1.18
Curvas solución e isóclinas (Máxima 5.24.0).

1.8 Solución numérica de una ecuación diferencial

Los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales se pueden resumir en:

Método analítico

Método que consiste en la búsqueda de soluciones a las ecuaciones diferenciales.

Análisis cualitativo

En este método se utiliza a la ecuación diferencial como fuente de información sobre las propiedades de las posibles soluciones.

Análisis numérico

Aproximación a los valores de la solución.

Una forma de aproximar una solución de una ecuación diferencial con valor inicial:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

es por medio de la recta tangente que pasa por ese punto; es decir, vamos a **linealizar** el problema acercándonos con una recta que pase por un punto dado y que sea tangente a la curva en dicho punto.

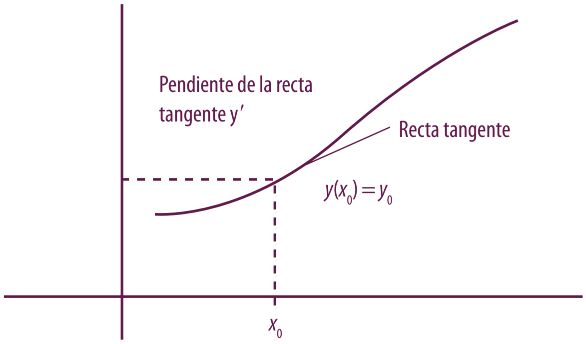


Figura 1.19

La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y = mx + b$$

La pendiente es igual a $y' = f(x_0, y_0)$; la recta tangente y la curva pasan por el punto (x_0, y_0), entonces:

$$y_0 = f(x_0, y_0)x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - f(x_0, y_0)x_0$$

Así pues, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(x_0, y_0)x + y_0 - f(x_0, y_0)x_0$$
$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Entonces:

$$y_1 = y(x_0 + h) = y'(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + y_0 = y'(x_0, y_0)h + y_0$$

$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0$
$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$	$y_2 = f(x_1, y_1)h + y_1$
$x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$	$y_3 = f(x_2, y_2)h + y_2$
...	...
$x_n = x_{n-1} + h = x_0 + (n-1)h$	$y_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})h + y_{n-1}$
$x_{n+1} = x_n + h = x_0 + nh$	$y_{n+1} = f(x_n, y_n)h + y_n$

Es obvio que la aproximación será mejor entre más pequeño se elija el paso h y el intervalo en donde se va a graficar la curva solución no sea muy grande; siempre va a existir un error absoluto ente el valor real de la función y la aproximación a la solución con el método de Euler:

error = valor real de la función − aproximación

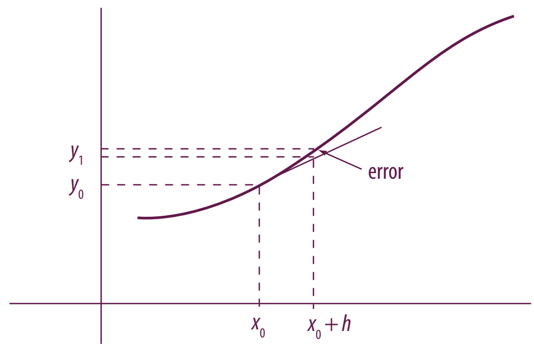


Figura 1.20

Para encontrar los valores de la función aproximados, se puede usar la ecuación de recurrencia:

$$y_{n+1} = f\left(x_n, y_n\right)h + y_n$$

Problema resuelto

Utilizar el método de Euler para encontrar la solución numérica de la ecuación diferencial $y' = 2xy$, que pasa a través del punto (0,1). Usar un paso de $h = 0.1$.

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 1$$
$$h = 0.1$$
$$f(x, y) = 2xy$$

Solución

La solución particular exacta, como después veremos, es: $y = e^{x^2}$

x_n	$y_{n+1} = f(x_n, y_n)h + y_n$	$y = e^{x^2}$
0	1	1
0.1	1	1.01005017
0.2	1.02	1.04081077
0.3	1.0608	1.09417428
0.4	1.124448	1.17351087
0.5	1.21440384	1.28402542
0.6	1.33584422	1.43332941
0.7	1.49614553	1.63231622
0.8	1.70560591	1.89648088
0.9	1.97850285	2.24790799
1	2.33463336	2.71828183

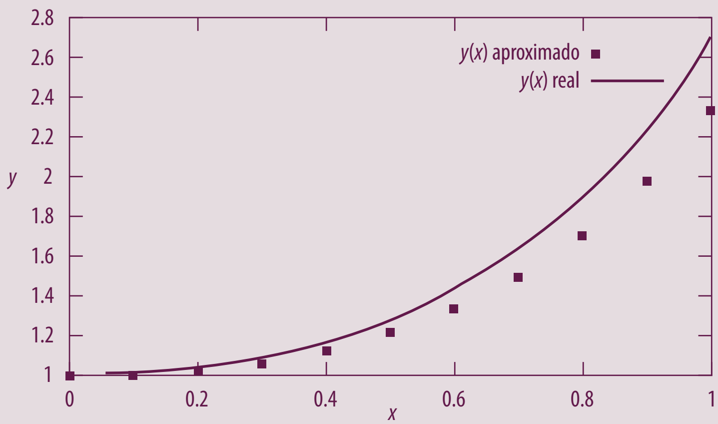


Figura 1.21

Método de Euler mejorado

Este método se basa en la misma idea del método de Euler (postulado antes), pero este hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y^*_{n+1}\right)\right]}{2}$$

Donde:

$$y^*_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:

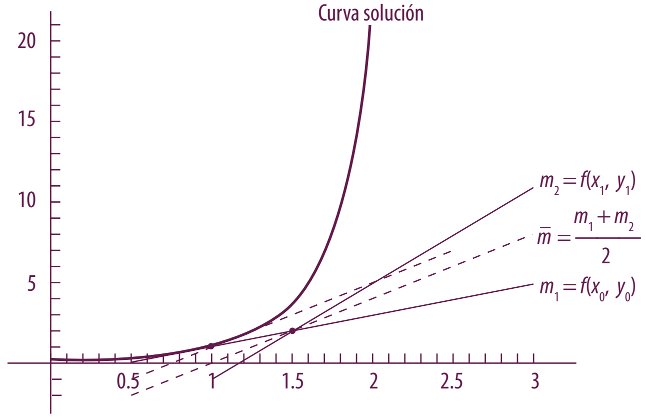


Figura 1.22

En la gráfica, se puede observar que la pendiente promedio $\bar{m}$ corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y que la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1), donde y_1, es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$, como la aproximación de Euler mejorada.

Problema resuelto

Utilizar el método de Euler mejorado para encontrar la solución numérica de la ecuación diferencial $y' = 2xy$ que pasa a través del punto (0, 1). Usar un paso de $h = 0.1$.

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 1$$
$$h = 0.1$$
$$f(x, y) = 2xy$$

Solución

A diferencia del método de Euler, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo; primero, el de $\dot{y}_k$, y posteriormente el de y_k.

Los datos iniciales son:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 1$$
$$h = 0.1$$
$$f(x, y) = 2xy$$

	Euler	Euler mejorado	
x_n	$y_{n+1} = f(x_n, y_n)h + y_n$	$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$	$y = e^{x^2}$
0	1	1	1
0.1	1	1.01	1.01005017
0.2	1.02	1.0405	1.04081077
0.3	1.0608	1.0935502	1.09417428
0.4	1.124448	1.17332926	1.17351087
0.5	1.21440384	1.28682336	1.28402542
0.6	1.33584422	1.44511018	1.43332941
0.7	1.49614553	1.66566689	1.63231622
0.8	1.70560591	1.97656097	1.89648088
0.9	1.97850285	2.42432495	2.24790799
1	2.33463336	3.08947633	2.71828183

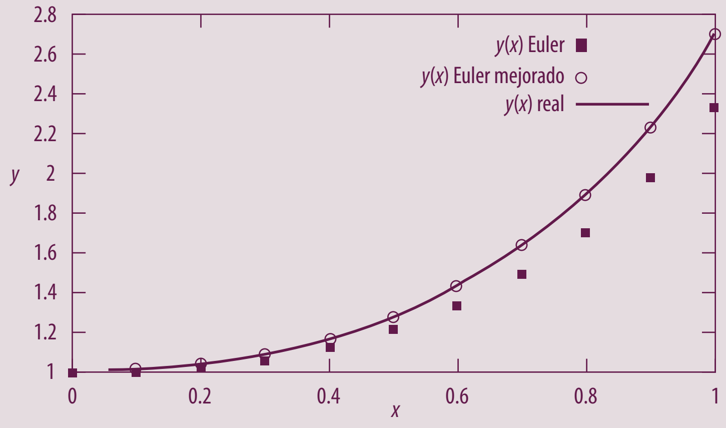


Figura 1.23

La aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0, 5) \approx 1.28682336$$

Por tanto, el error relativo es:

$$\left|\frac{1.28402542 - 1.28682336}{1.28402542} \times 100\%\right| = 0.218\%$$

1.9 Modelos matemáticos usando ecuaciones diferenciales

Las matemáticas constituyen una herramienta útil para la solución de problemas, en especial cuando tratamos con problemas en los que se presenta el cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente; las ecuaciones diferenciales son útiles en la modelación matemática de dichos problemas.

Modelo matemático

Un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real.

La formulación de un modelo matemático implica:

- Identificar las variables causantes del cambio de un sistema.
- Establecer un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema (leyes empíricas aplicables).

Con frecuencia, las hipótesis de un sistema implican la razón o tasa de cambio de una o más variables que intervienen. El enunciado matemático de esas hipótesis consiste en una o más ecuaciones donde intervienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

El proceso de modelado sigue básicamente los siguientes pasos:

1. Identificación de variables, estableciendo una notación matemática.
2. Leyes empíricas que se pueden aplicar.
3. Planteamiento de las ecuaciones.

En los siguientes ejemplos presentaremos el modelo matemático para diferentes situaciones.

Desintegración radiactiva

A fines del siglo XIX se realizaron descubrimientos importantes relacionados con la producción natural de radiación de alta energía proveniente de ciertos elementos. Por ejemplo, en 1896 el francés Henri Becquerel encontró que una pieza de un mineral que contenía uranio podía producir imágenes suyas en una película fotográfica, en completa ausencia de luz. Él atribuyó este fenómeno a la emisión espontánea de radiación del uranio, fenómeno que bautizó con el nombre de radiactividad. Así, a comienzos del siglo XX ya se conocían al menos tres tipos de emisiones radiactivas: los rayos gamma (γ), las partículas beta (β) y las partículas alfa (α).

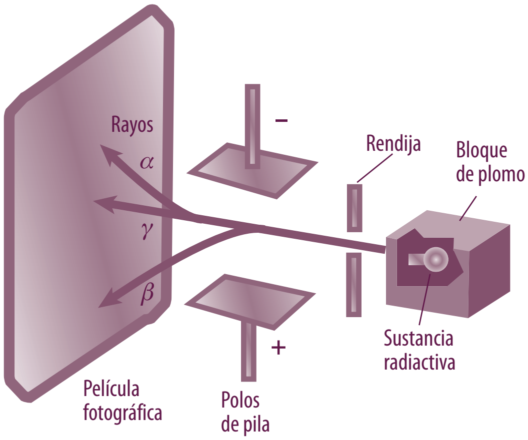


Figura 1.24

Figura 1.25
Henri Becquerel.

Henri Becquerel y los esposos Curie obtuvieron el premio Nobel de Física en 1903, gracias a sus estudios y descubrimientos relacionados con la radiactividad.

Se sabe que la inestabilidad de los núcleos provoca la emisión de varios tipos de radiación.

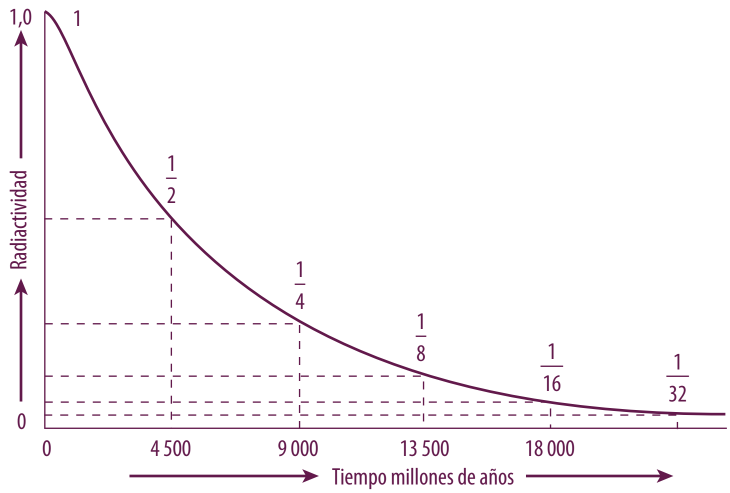


Figura 1.26

Ahora, nos interesa construir un modelo matemático del fenómeno, para lo cual se analizará el siguiente ejemplo:

Alerta

Una sustancia se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente.

Problema resuelto

Si en 11.7 días se desintegra 1/3 de la masa de una sustancia radiactiva, ¿qué cantidad de la masa original queda después de 20 días?

Solución

Para la solución de este problema:

1. Se establecen las variables.

   Del enunciado observamos que la masa varía con respecto al tiempo, entonces la variable independiente es t y la variable dependiente es M.

Sea, entonces:

$$M_0 = M(0) = \text{masa de la sustancia, en el tiempo } t = 0.$$

$$M(t) = \text{masa de la sustancia a cualquier tiempo.}$$

2. Se formula el modelo matemático:

El enunciado dice que la sustancia se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente, esto significa que la razón de cambio de la masa con respecto al tiempo: $\frac{dM}{dt}$ es negativamente proporcional a la masa presente en cualquier tiempo, ya que el enunciado expresa que la sustancia se está desintegrando; esta es la razón del signo menos. Esto, expresado en forma matemática, sería:

$$\frac{dM}{dt} = -AM$$

3. Se establecen las condiciones iniciales.

La cantidad de masa existente a los 11.7 días es 2/3 de la masa original, puesto que se ha desintegrado 1/3 de la masa original.

$$M(11.7 \text{ días}) = 2M_0/3$$

4. Se resuelve la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dM}{dt} = -AM$$

Con la condición inicial: $M(11.7 \text{ días}) = 2M_0/3$.

Carbono 14

Hasta 1940, determinar la antigüedad de los objetos arqueológicos en términos de años, o sea establecer la fecha de su creación (fecharlos), era un sueño para los arqueólogos, por lo que muchas de sus teorías no eran consideradas más que afortunadas ocurrencias. Sin embargo, en 1949 se dio a conocer la posibilidad de fechar materiales orgánicos con una técnica llamada fechamiento por radio-carbono, descubierta por William Libby (Premio Nobel de Química de 1960), de la Universidad de Chicago. Es indudable que la técnica del radio-carbono, comúnmente conocida como carbono 14, es una de las técnicas que han sido usadas con mayor éxito en diferentes áreas de las ciencias.

Uno de los principales aportes de esta técnica ha sido demostrar que es posible determinar la antigüedad de un material con base en el conocimiento profundo de los procesos naturales, que pueden ser relacionados con el tiempo. Por tanto, el radio-carbono también ha sido útil para plantear otras técnicas de fechamiento basadas en la radiactividad.

Durante su vida, los vegetales absorben continuamente carbono 14, el cual, por ser un material radiactivo, se desintegra. De esta forma, se ha podido demostrar, en pruebas de laboratorio, que la cantidad de carbono 14 presente durante la vida de un ser vivo se mantiene constante hasta su muerte, momento en que cesa de absorberlo; a partir de entonces, la cantidad de carbono 14 empieza a disminuir.

Problema resuelto

Un paleontólogo halló el hueso fosilizado de un animal, el cual, después de un análisis del laboratorio, se descubrió que contiene una milésima de la concentración de C-14 que se encuentra en la materia viva. Estimar la edad del fósil.

Solución

1. Establecer las variables.

   La cantidad de C-14 varía con respecto al tiempo, entonces la variable independiente es t y la variable dependiente es M.

   Sea:

   $$M_0 = M(0) = \text{cantidad de carbono 14, en el tiempo } t = 0.$$

   $$M(t) = \text{cantidad de carbono 14 a cualquier tiempo.}$$

2. Formular el modelo matemático.

   El C-14 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente, esto significa que la razón de cambio de la masa con respecto al tiempo $\frac{dM}{dt}$ es negativamente proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo. Esto se expresa en forma matemática como:

   $$\frac{dM}{dt} = -AM$$

3. Condiciones iniciales.

   Sabemos que la cantidad de C-14 existente a los 5 600 años es 1/2 (mitad) de la cantidad original; entonces, se puede decir que se ha desintegrado 1/2 de la cantidad original:

   $$1/2M_0 = M(5\,600)$$

4. Se resuelve la ecuación diferencial:

   La ecuación diferencial a resolver $\frac{dM}{dt} = -AM$.

   Con la condición inicial, entonces:

   $$M(5\,600 \text{ años}) = M_0/2.$$

Ley del enfriamiento de Newton

La ley del enfriamiento de Newton establece que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente.

Problema resuelto

La temperatura de una sustancia que se halla en una habitación que está a 30 °C baja de 100 °C a 80 °C en 15 minutos; determinar la temperatura de la sustancia al cabo de 20 minutos.

Solución

1. Se establecen las variables.

   Del enunciado observamos que la temperatura varía con respecto al tiempo, entonces la variable independiente es t y la variable dependiente es T.

   Sea:

   $$T_0 = T(0) = \text{temperatura, al tiempo } t = 0.$$

   $$T_0 = 100\ °C$$

   $$T_m = \text{temperatura del medio ambiente}$$

   $$T(t) = \text{temperatura del cuerpo a cualquier tiempo.}$$

2. Se formula el modelo matemático.

El enunciado dice que la velocidad de enfriamiento, $\frac{dT}{dt}$, es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente. Por tanto:

$$\frac{dT}{dt} = A\left(T - T_m\right)$$

3. Condiciones iniciales:

Al tiempo $t = 0$ la temperatura es $T_0 = T(0) = 100$ °C.

Al tiempo $t = 15$ minutos, la temperatura $T(15 \text{ min}) = 80$ °C.

La ecuación diferencial a resolver es: $\frac{dT}{dt} = A\left(T - T_m\right)$

Con las condiciones iniciales $T_0 = T(0) = 100$ °C y $T(15 \text{ min}) = 80$ °C.

Problema resuelto

Crecimiento o decrecimiento de población

Considérese que en un cultivo de bacterias, la rapidez de crecimiento es proporcional al número presente en cada instante. Si en 8 horas hay 16 veces el número original, ¿qué debemos hacer para determinar la cantidad al cabo de 2 horas?

Solución

1. Establecemos las variables.

Del enunciado observamos que la población de bacterias P varía con respecto al tiempo; entonces, la variable independiente es t y la variable dependiente es P.

2. Formulamos el modelo matemático.

El enunciado dice que la rapidez de crecimiento de la población, $\frac{dP}{dt}$, es proporcional a la población actual:

$$\frac{dP}{dt} = AP$$

3. Establecemos las condiciones iniciales.

Sea P_0 la población de bacterias al tiempo $t = 0$. En 8 horas hay 16 veces el número original de bacterias, entonces:

$$P_0 = P(0)$$

$$P(8) = 16\ P_0$$

La ecuación diferencial a resolver es: $\frac{dP}{dt} = AP$ con las condiciones iniciales $P_0 = P(0)$ y $P(8) = 16\ P_0$.

Como $\frac{dP}{dt} = AP$ para alguna constante A, $\frac{dP}{dt} = 0$ si $P = 0$, la función constante $P(t) = 0$, es una solución de la ecuación diferencial.

A este tipo especial de solución se le llama **solución de equilibrio**, porque es constante para siempre. En términos del modelo de población, corresponde a una especie que no existe.

Si $P(t) \neq 0$ en algún t_0, entonces en el tiempo $t = t_0$, $\frac{dP}{dt} = AP\left(t_0\right) \neq 0$. Por tanto, la población no es constante. Si $A > 0$ y $P(t) > 0$, tenemos $\frac{dP}{dt} = AP\left(t_0\right) > 0$, en el tiempo $t = t_0$ y la población está creciendo. Conforme t aumenta, $P(t)$ aumenta, y $\frac{dP}{dt}$ también aumenta. $P(t)$ crece aún más rapidamente. La velocidad de crecimiento aumenta en relación directa con la población.

Figura 1.27
Thomas Robert Malthus (1766-1834).

Thomas Robert Malthus, economista británico de la escuela clásica, fue discípulo de Adam Smith. Estudió en Cambridge, donde se graduó en matemáticas; posteriormente, se ordenó religiosamente como pastor de la Iglesia Anglicana.

En 1805, fue nombrado profesor de historia moderna y economía política del East India College; se puede decir que este hecho marcó un hecho trascendente, ya que se considera que fue el primer profesor de economía política de la historia.

El pesimismo de la escuela clásica quedó expresado claramente por Malthus. La población y la riqueza pueden crecer, pero hay un límite, alcanzado el cual se llegará a un estado estacionario en el que la vida será miserable, mera supervivencia.

Problema resuelto

Efecto de la pesca en una población de peces

Supóngase que la población de peces aumenta a una razón continua de 20% por año y que los peces son pescados a una razón constante de 10 millones de ejemplares al año. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la población a lo largo del tiempo?

Solución

1. Establecemos las variables.

   Del enunciado observamos que:

   Razón de cambio de la población de peces = Razón de aumento debido a la cría − Razón de los peces eliminados debido a la pesca

   Sea $P(t)$ la población de peces, en millones, y t el tiempo, en años.

2. Formulamos el modelo matemático.

   El enunciado dice que la población de peces aumenta a una razón continua de 20% por año, por lo que se tiene:

   $$\begin{aligned}\text{Razón de aumento} &= 20\% \cdot \text{Población actual}\\ &= 0.20P \text{ millones de peces/año}\end{aligned}$$

   Razón de peces eliminados por la pesca = 10 millones de peces/año.

   Ya que la razón de cambio de la población de peces es dP/dt; la ecuación diferencial que modela la población de peces es:

   $$dP/dt = 0.20P - 10$$

Problema resuelto

Contaminación en un lago

Considérese que si fluye agua limpia en un lago contaminado y una corriente saca agua. ¿El nivel de contaminación en el lago disminuirá (suponiendo que no se agregan nuevos contaminantes)?

Solución

1. Establecemos las variables.

   La cantidad de contaminantes en el lago disminuye a una razón proporcional a la cantidad presente. Sea Q la cantidad de contaminante que está presente en el lago al tiempo t.

2. Formulamos el modelo matemático.

   La razón de cambio de Q es proporcional a Q, por lo que dQ/dt es proporcional a Q. Por tanto, la ecuación diferencial es:

   $$dQ/dt = -MQ$$

   Puesto que no se arrojaron más contaminantes al lago, la cantidad Q disminuye a lo largo del tiempo, de ahí que dQ/dt sea negativa.

Problema resuelto

Cantidad de medicamento

A un paciente se le suministra penicilina por vía intravenosa a una razón de 85 mg, con una constante de proporcionalidad 0.1, si el tiempo se mide en horas. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la cantidad de medicamento a lo largo del tiempo?

Solución

1. Establecemos las variables.

   La cantidad de penicilina, Q, aumenta a una razón constante de 85 mg/hora y disminuye a una razón de 0.1 por Q.

2. Formulamos el modelo matemático.

   La administración de 85 mg/hora contribuye positivamente a la razón de cambio dQ/dt. La excreción a una razón de $0.1Q$ contribuye negativamente a dQ/dt. Al unir ambas razones, se tiene que:

   Razón de cambio de una cantidad = Razón de entrada – Razón de salida

   Por tanto, la ecuación diferencial a resolver es:

$$dQ/dt = 85 - 0.1Q$$

Ecuación diferencial logística

Para ejemplificar una **ecuación diferencial logística**, supóngase que una población en un espacio cerrado crece de forma proporcional al producto de la población actual, P, y la diferencia entre la *capacidad que puede soportar*, b, y la población actual. (La capacidad que puede soportar es la población máxima que el medio ambiente puede sostener de esa población.) Esta información se utiliza para escribir una ecuación diferencial para la población P.

La razón de cambio de P es proporcional al producto de P y $b - P$. Por tanto,

$$\frac{dP}{dt} = kP(b - P)$$

donde k y b son constantes positivas.

A esta ecuación se le llama **ecuación diferencial logística**.

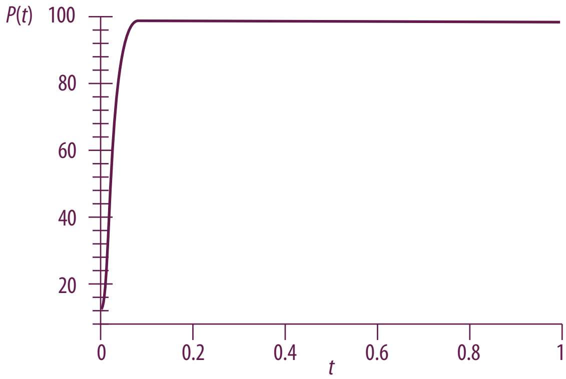


Figura 1.28

Curva de crecimiento logístico. Gráfica de $P(t)$.

Cuando P es pequeña, la derivada dP/dt es pequeña y la población crece lentamente. Conforme P aumenta, la derivada dP/dt aumenta y la población crece con mayor rapidez.

Sin embargo, conforme P tiende a la capacidad de soporte, b, el término $L - P$ es pequeño, y de nuevo, dP/dt, es pequeña y la población crece con más lentitud.

Problemas para resolver

1.1 Indica si las expresiones siguientes corresponden o no a una ecuación diferencial. Justifica tu respuesta.

a) $y' = y \operatorname{sen} x$

b) $y' = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

c) $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{y}$

e) $x + y\cos^2 x = 0$

f) $\left(y - x^3\right)dx + \left(x - y^3\right)dy = 0$

g) $\left(x + \dfrac{2}{y}\right)dx + dy$

h) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

i) $ds = (10t + 1)dt$

j) $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

1.2 En los problemas siguientes, indica la variable dependiente y la, o las, variables independientes:

a) $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{d\theta}{dt} + 5(\theta - \pi) = 0$

b) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

c) $\dfrac{dT}{dt} + kT = 0$

d) $\dfrac{dp}{dt} = kp(8 - p)$

e) $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$ con k una constante.

f) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

g) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + x = 0$

i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

j) $\left(y - x^3\right) + \left(x - y^3\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

1.3 En los problemas siguientes, determina el orden de las ecuaciones diferenciales e indica si la ecuación es lineal o no.

a) $z^2\dfrac{d^2y}{dz^2} + z\dfrac{dy}{dz} + 6y = \cos z$

b) $\left(2 + y^3\right) + \dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

c) $\dfrac{dx}{dy} + yx^3 = 0$

d) $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} + \operatorname{sen}(x + \theta) = \operatorname{sen}\theta$

e) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 1$

f) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

g) $(1 - x)y'' - 2xy' + 7y = \cos x$

h) $3\dfrac{dy}{dx} + 4y = 6$

i) $(x^2 - y)dx + 5\operatorname{sen} y\,dy = 0$

j) $yy' + 2y = 1 + x^2$

k) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3}$

1.4 En los problemas siguientes, indica si las funciones son solución de la ecuación diferencial dada:

a) $y = \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{5}{3}e^{-2x}$ de $y' + 2y = e^x$

b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ de $xy' + y = \cos x$

c) $\dfrac{1}{y} = 3x$ de $y' - 3y^2 = 0$

d) $y^2 - x^3 + 8 = 0$ de $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$

e) $4x^2 - y^2 = C$ de $y\dfrac{dy}{dx} - 4x = 0$

1.5 Utiliza el teorema de existencia y unicidad para indicar si los siguientes problemas de valor inicial tienen solución; si la tienen señalar si esta es única o no.

a) $y' = x$ con $y(1) = 1$

b) $y' = x^3$ con $y(1) = 1$

c) $y' = \cos x$ con $y(0) = 0$

d) $y' = e^x$ con $y(0) = 1$

e) $y' = \dfrac{1}{x}$ con $y(0) = 1$

f) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ con $y(0) = 1$

1.6 La solución general de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{1}{x(x-1)}$ es $y = \ln\dfrac{c(x-1)}{x}$. Encuentra la solución particular que satisface la condición inicial dada y subraya el inciso de la solución correcta.

a) $y(-1) = 0$

b) $y(1) = 0$

c) $y(3) = 0$

1.7 La solución general del problema de valor inicial $y' = \dfrac{1}{x(x-a)}$ con $y(x_0) = 0$ es $y = \ln\dfrac{c(x-a)^a}{x^a}$. ¿Cuál es la solución particular? Sigue el método propuesto en el libro.

1.8 Indica para qué valor de a la ecuación diferencial $y' + 5y = 0$ tiene soluciones de la forma $y = e^{ax}$.

1.9 Indica los valores de a para los cuales la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2 = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y = e^{ax}$.

1.10 Indica los valores de a para los cuales la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 2y = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y = x^a$.

1.11 Demuestra que $y = e^{2-x}$ es una solución de $y' + 2y = 0$ y que $y = ce^{-2x}$ también es solución de esta ecuación para cualquier valor de la constante c.

1.12 Demuestra que $y = \dfrac{1}{x}$ es una solución de $y' + y^2 = 0$ para $x > 0$, pero $y = \dfrac{c}{x}$ no es una solución de esta ecuación, a menos de que $c = 0$ o $c = 1$.

1.13 Demuestra que si $g(x)$ es una solución de $y' + p(x)y = 0$, entonces $cg(x)$ también es una solución para cualquier constante c.

1.14 Demuestra que $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$ es la solución general de $y'' + 5y' + 6y = 0$.

1.15 Determina la solución del problema de valor inicial $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

1.16 Dada la ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determina el valor de las constantes arbitrarias de los problemas siguiente.

a) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$, $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

b) $2y'' + y' - y = 0$, $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) $y' = 12x$, $y = 6x^2 + c^1$, $y\left(\sqrt{2}\right) = -1$.

d) $y'' + y = \cos x + 4$, $y = \dfrac{x}{2}\operatorname{sen} x + c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + 4$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

e) $y'' = ex$, $y = e^x + c_1 + c_2x$, $y(0) = \ln 2$, $y'(\ln 2) = 0$.

1.17 La función $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $y' + 2y = e^{3x}$, determina la solución particular para la condición inicial $y(0) = 3$.

1.18 La función $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$, determina C_1 y C_2, de modo que se cumplan las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = -3$.

1.19 La función $y = -\dfrac{x^2}{2} + C_1 + C_2x + C_3e^{-4x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4 = 0$, determina C_1, C_2 y C_3, de modo que se cumplan las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$, $y'(0) = 0$.

1.20 La función $z = e^{2x} + C_1\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ es la solución general de la ecuación diferencial $2z'' + z = 9e^{2x}$, determina C_1 y C_2, de modo que se cumplan las condiciones iniciales $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$.

1.21 La función $y = \dfrac{4}{3}x^3 + C_1 + C_2x + C_3x^2$ es la solución general de la ecuación diferencial $y''' = 8$, determina C_1, C_2 y C_3, modo que se cumplan las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$.

1.22 Encuentra los valores de m tales que $y = x^m$ sea solución de la siguiente ecuación $x^2y'' + y = 0$.

ALERTA: Una solución de una ecuación diferencial se llama singular si no se puede obtener de la solución general al sustituir las constantes por valores, es decir, no es una solución particular.

1.23 Comprueba que una familia de soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^2$ es $y = c^2 + cx$.

1.24 Determina un valor m tal que $y = mx^2$ sea una solución singular de la ecuación diferencial dada.

1.25 Calcula las trayectorias ortogonales para la familia de curvas $Ce^{-\frac{x}{2}}$.

1.26 Para diferentes valores de las constantes, traza la gráfica de la familia de curvas y de las trayectorias ortogonales del ejercicio anterior.

1.27 Calcula las trayectorias ortogonales para la familia de curvas: $x^2 - y^2 = a^2$.

1.28 Para diferentes valores de las constantes, traza la gráfica de la familia de curvas y de las trayectorias ortogonales del ejercicio anterior.

T **1.29** Calcula las trayectorias ortogonales para la familia de curvas: $y = x^2 + a$.

T **1.30** Para diferentes valores de las constantes, traza la gráfica de la familia de curvas y de las trayectorias ortogonales del ejercicio anterior (1.29).

1.31 Calcula las trayectorias ortogonales para la familia de curvas: $x^2 + y^2 = r^2$.

T **1.32** Para diferentes valores de las constantes, traza la gráfica de la familia de curvas y de las trayectorias ortogonales del ejercicio anterior (1.31).

1.33 Calcula las trayectorias ortogonales para la familia de curvas: $x^2 - 2y^2 = r^2$.

T **1.34** Para diferentes valores de las constantes, traza la gráfica de la familia de curvas y de las trayectorias ortogonales del ejercicio anterior (1.33).

1.35 Dada la ecuación diferencial, construye el campo direccional, las isóclinas y la familia de curvas solución en los problemas que se presentan enseguida.

a) $y' = x - y$

b) $y' = x + 3$

c) $y' = y + x$

d) $y' = \dfrac{1}{y}$

e) $y' = ye^x$

f) $\dfrac{dy}{dx} = 5 + 2\sqrt{y}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x^2$

h) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + x^2$

i) $y' = 3y + \dfrac{1}{2}y^4$

T **1.36** Con el método de Euler mejorado con $h = 0.1$, obtén el valor aproximado para $y(1.5)$ para la solución de $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1$, $y(1) = 1$. Compara el valor con el de la solución exacta, $y(x) = \dfrac{1}{3}x + x - \dfrac{1}{3}$.

1.37 Con el método de Euler, con $h = 0.1$, obtén el valor aproximado para $y(0.5)$ para la solución de $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ con $y(0) = 1$.

1.38 Usa los métodos de Euler y Euler mejorado para encontrar la solución numérica de la ecuación diferencial $y' = 6x - 2y$ en el intervalo (0, 1, 5), que pasa a través del punto (0, 1). Usa un paso de $h = 0.1$. Compara con la solución exacta que es $y(x) = 3x + \dfrac{5}{2}e^{-2x} - \dfrac{3}{2}$.

1.39 Usa los métodos de Euler y Euler mejorado, con un tamaño de incremento $h = 0.05$, para aproximar la solución del problema con valor inicial $\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{2} - z$ con $y(0) = 1$, en el intervalo $0 \le z \le 1$.

T **1.40** Se tiene el problema con un valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} - 3x = 4 - 2t, \qquad x(0) = 1$$

Utiliza el método de Euler con varios tamaños de incremento para calcular valores aproximados de la solución en el intervalo $0 \le t \le 6$. Compara los resultados con los valores correspondientes de la solución exacta, que es:

$$x(t) = \frac{19}{9}e^{3t} + \frac{2}{3}t - \frac{10}{9}.$$

SR **1.41** De acuerdo con la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Supongamos que m representa la cantidad total de un tema que se debe memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada, cuando el tiempo es t. Formula una ecuación diferencial para determinar la cantidad $A(t)$.

SR **1.42** La cantidad $M(t)$ de cierto medicamento en la corriente sanguínea se mide por su exceso sobre su nivel natural; el medicamento disminuye de forma proporcional a la cantidad excedente actual. Formula una ecuación diferencial para determinar la cantidad $M(t)$.

SR **1.43** Un paracaidista se lanza desde las alturas junto con su paracaídas, partiendo desde el reposo; el peso total es w kilogramos. Sobre el sistema actúa una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad si la caída es vertical. Formula una ecuación diferencial para determinar su velocidad en cualquier tiempo.

SR **1.44** La fuerza del resorte es proporcional a su alargamiento. Entonces, supóngase que un resorte produce una fuerza de 4 N y un alargamiento de 50 cm; mientras que un peso de 196 N colgado desde el resorte se empuja hacia abajo a partir de la posición de reposo, que está a 1 m. Si se suelta el peso, formula una ecuación diferencial para analizar el movimiento en los siguientes casos:

a) No hay resistencia del aire.

b) La resistencia del aire es 8 v.

SR **1.45** El dinero de una cuenta bancaria genera intereses a una razón continua anual de 5% multiplicada por el saldo actual. Escribe una ecuación diferencial para el saldo S($) en la cuenta como una función del tiempo, t (años).

SR **1.46** Una población de animales crece a una razón proporcional al tamaño de la población. Escribe una ecuación diferencial para el tamaño de la población, P, como una función del tiempo, t. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Explica.

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

SR **1.47** Las sustancias radiactivas decrecen a una razón proporcional a la cantidad presente. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad, Q, de una sustancia radiactiva al tiempo t. ¿La constante de proporcionalidad es positiva o negativa? Explica.

SR **1.48** Una taza de café contiene aproximadamente 100 mg de cafeína. Esta sustancia se metaboliza y elimina del cuerpo a una razón continua de aproximadamente 17% cada hora. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad, A, de cafeína en el cuerpo como una función del número de horas, t, a partir del momento que se consumió el café.

SR **1.49** El alcohol se metaboliza y elimina del cuerpo a una razón de aproximadamente una onza por hora. Si una persona toma alcohol, escribe una ecuación diferencial para la cantidad de alcohol, A (en onzas), que permanece en su cuerpo como una función del tiempo t, en horas, después de que se consumió el alcohol.

SR **1.50** Una cuenta bancaria que inicialmente tiene \$250 000 genera intereses a una razón continua de 10% por año. Al cabo de un tiempo, se realizan retiros de la cuenta a una razón constante de \$20 000 al año. Escribe una ecuación diferencial para el saldo, S, en la cuenta como una función del número de años, t.

SR **1.51** En un caso médico, se administra morfina a un paciente por vía intravenosa a razón de 2.5 mg por hora. Se ha comprobado que, aproximadamente, 34.7% de la morfina en el cuerpo de un paciente se metaboliza y elimina del cuerpo cada hora. Escribe una ecuación diferencial para la cantidad de morfina, M, en mg, en el cuerpo como una función del tiempo, t, en horas.

SR **1.52** Las toxinas que se encuentran en los pesticidas pueden entrar en la cadena alimenticia y acumularse en el cuerpo. Supongáse que una persona consume 10 microgramos al día de una toxina que se ingesta a lo largo de un día. La toxina se elimina del cuerpo a una razón continua de 3% cada día. Formula una ecuación diferencial de la cantidad de toxina, A, en microgramos, en el cuerpo de esa persona en función de tiempo (días).

SR **1.53** Un tanque con capacidad de 100 L está lleno de salmuera, la cual contiene 60 kg de sal disuelta. Al tanque entra agua con un gasto de 12 L/min y la mezcla se conserva uniforme agitándola; la salmuera sale a la misma velocidad. Formula una ecuación diferencial para la cantidad de sal, S (kg), en función del tiempo (horas).

SR **1.54** La sustancia A se transforma en la sustancia B. La velocidad de formación de B varía en forma directamente proporcional a la cantidad de A presente en cada instante. Si inicialmente hay 10 kg de la sustancia A y después de una hora hay 5 kg de la sustancia B, formula una ecuación diferencial para la cantidad de sustancia B (kg) en función del tiempo (horas).

SR **1.55** Supóngase que se encontró el cuerpo de una víctima de asesinato a mediodía, en una habitación con una temperatura de 20 °C. Hacia las 12:00 p.m., la temperatura del cuerpo era de 35 °C, mientras que dos horas después era de 33 °C. Formula una ecuación diferencial de la temperatura, T(°C), del cuerpo como una función del tiempo t (horas).

1.56 Una pelota de goma de 0.50 g de masa se lanza de forma vertical hacia arriba, con una velocidad de 50 m/s; si se considera que el aire no ofrece ninguna resistencia a la pelota, escribe la ecuación que modela el movimiento de la pelota.

SR **1.57** Un elemento radiactivo se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si la mitad de la cantidad original desaparece en 1 600 años, determina el problema de valor inicial que modela el problema.

SR **1.58** En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de aumento de población es proporcional al número presente en cualquier instante. Si se sabe que el número original se ha duplicado en 6 horas, determina el problema de valor inicial que modela el problema.

1.59 Un barco disminuye su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es $15\frac{\text{m}}{\text{s}}$; pero, después de 5 segundos disminuye a $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Indica el problema de valor inicial que modela esta situación.

1.60 Una masa de 30 g cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad. Indica la ecuación diferencial que modela la velocidad.

1.61 En un movimiento rectilíneo, la aceleración de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia x y es igual a -1 cuando $x = 5$; por su parte, la velocidad es igual a 5 y la distancia es igual a 10 cuando $t = 0$. Indica el problema de valor inicial que modela la velocidad.

SR **1.62** La población actual de tortugas en Puerto Escondido, Oaxaca, es de 140 000 individuos y su tasa de crecimiento es de 15% por mes; sin embargo, sus depredadores matan 3 tortugas por día. Escribe la ecuación diferencial que modela la población de tortugas.

SR **1.63** La ecuación diferencial que modela el decrecimiento de una población P, es $\frac{dP}{dt} = -kP$, cuya solución general $P = P(0)e^{-kt}$. Si, por el fenómeno de migración, la población de una ciudad del norte del país disminuye a la mitad en 25 años, ¿cuál es el valor de k? ¿En cuántos años solo será la tercera parte, si se supone que la razón de decrecimiento es proporcional al número de habitantes?

1.64 Según la ley de Kirchoff, la fem suministrada, ε, es igual a la caída del voltaje a través del inductor, $L\frac{di}{dt}$, más la caída del voltaje a través de la resistencia, iR; es decir, $L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon$. Si $\varepsilon = 150$ V, $R = 10\ \Omega$ y $L = 1$ H, formula una ecuación diferencial para calcular el valor de la corriente al tiempo t, ya que no hay corriente inicial.

PROBLEMA RETO

1 Una población de conejos, p, que se encuentra en una granja, crece a una tasa proporcional a la población de ese momento; es decir, $\frac{dp}{dt} = rp$, cuya solución es $P(t) = P_0e^{rt}$.

a) Comprueba que $P(t) = P_0e^{rt}$ es su solución.

b) Calcula r si la población se duplica en 30 días y r si la población se triplica en 45 días.

c) ¿Qué pasa si a causa de una enfermedad la población decrece en 10%? Calcula r.

d) Indica el orden de la ecuación y si esta es lineal o no.

REFERENCIAS

Edwards, Henry C. y David E. Penny. (2001). *Ecuaciones diferenciales* (5ª. ed.). Pearson. México.

Zill, Dennis G. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelo* (9ª. ed.). Cengage. México.

Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* (4ª. ed.). Mir. Moscú.

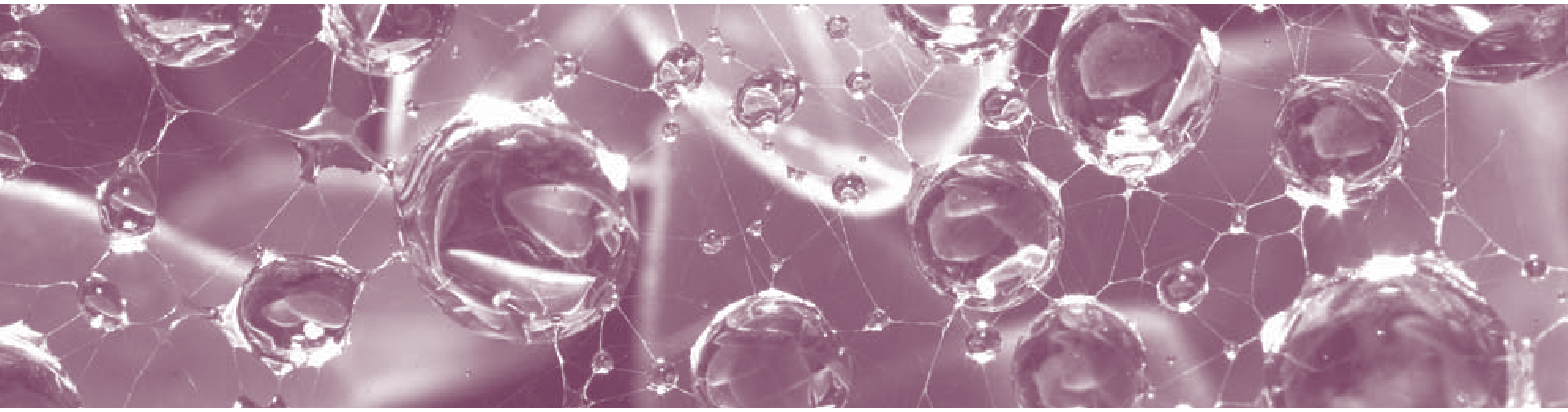
Boyce W. y DiPrima R. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ª. ed.). Limusa Willey. México.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS

Software freeware Maxima, http://andrejv.github.com/wxmaxima/

Software freeware Graph, http://www.padowan.dk/graph/

UNIDAD 2



Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

OBJETIVOS

- Conocer los diferentes métodos para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Modelar diferentes fenómenos para dar una solución.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cuál es la forma de variables separables de una ecuación diferencial?
- ¿Cuántos métodos de solución para resolver una ecuación diferencial de primer orden hay?
- ¿Cuáles son las funciones homogéneas?
- ¿Conoces la ecuación de Riccati?

2.1 Variables separables

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, adopta la forma de **variables separables** si se puede escribir como:

$$g(x) = h(y)y' = h(y)\frac{dy}{dx}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, primero se separa en la forma $g(x)dx = h(y)dy$ y luego se integra.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = 4x - 6$.

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6 \Rightarrow dy = (4x-6)dx$$

2. Integramos:

$$\int dy = \int (4x-6)\,dx \Rightarrow y = 4\frac{x^2}{2} - 6x + c = 2x^2 - 6x + c$$

3. Así, la solución general es: $y = 2x^2 - 6x + c$.
4. Comprobación de la solución:
   - Derivamos y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2 - 6x + c) = 4x - 6$$

   - Así, obtenemos la ecuación diferencial original.

Alerta

En este punto, usamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = \frac{9x^2 - 6}{x^2}$.

Solución

Esta ecuación se puede escribir como: $y' = 9 - \frac{6}{x^2}$

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = 9 - \frac{6}{x^2} \Rightarrow dy = \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx$$

2. Integramos: $\int dy = \int \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx$

$$\int \left(9 - \frac{6}{x^2}\right)dx = \int 9\,dx - \int \frac{6}{x^2}\,dx = 9x - 6\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 9x + 6x^{-1}$$

Alerta

En este caso, también utilizamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. Entonces:

$$y = 9x + 6x^{-1} + c = 9x + \frac{6}{x} + C$$

4. La solución general es: $y = 9x + \frac{6}{x} + C$

5. Comprobación de la solución:

- Derivamos a y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(9x + \frac{6}{x} + c\right) = 9 - \frac{6}{x^2} = \frac{9x^2 - 6}{x^2}$$

- Obtenemos la ecuación diferencial.

Problema resuelto

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas de la ecuación diferencial: $y' = e^{4x} - 5 \text{ sen } x$, con la condición inicial $y = (0) = 5$.

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} - 5 \text{ sen } x \Rightarrow dy = (e^{4x} - 5 \text{ sen } x)dx$$

2. Integramos:

$$\int dy = \int (e^{4x} - 5 \text{ sen } x)\, dx$$

$$\int dy = \int e^{4x}\, dx - 5 \int \text{sen } x\, dx$$

$$y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x + C$$

3. La solución general es:

$$y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5 \cos x + C$$

4. Para obtener la solución particular, aplicamos la condición inicial $y(0) = 5$:

$$y(0) = \frac{1}{4}e^{4(0)} + 5\cos(0) + C = \frac{1}{4} + 5 + C = \frac{1+20}{4} + C = \frac{21}{4} + C$$

$$\frac{21}{4} + C = 5 \Rightarrow C = 5 - \frac{21}{4} = \frac{20-21}{4} = -\frac{1}{4}$$

5. La solución particular es, entonces: $y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x - \frac{1}{4}$

6. Comprobación de la solución:

- Derivamos a y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x - \frac{1}{4}\right) = e^{4x} - 5 \text{ sen } x$$

Alerta

Para este caso, usamos las fórmulas de integración siguientes:

$$\int \text{sen } x dx = \cos x$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Problema resuelto

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas de la ecuación diferencial: $y' = e^x \cos^2 y$, con la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Solución

1. Separamos las variables:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = e^x dx \Rightarrow \sec^2 y dy = e^x dx$$

2. Integramos:

$$\int \sec^2 y dy = \int e^x \, dx$$

$$\tan y = e^x + C$$

3. La solución general es:

$$\tan y = e^x + C$$

4. Para obtener la solución particular, aplicamos la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$:

$$\tan \frac{\pi}{4} = e^0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

5. La solución particular es: $\tan y = e^x$.
6. Comprobación de la solución.
   - Derivamos la última expresión:

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sec^2 x} = e^x \cos^2 x$$

Alerta

Hasta aquí hemos usado las fórmulas de integración:

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

2.2 Ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

Cuando se tiene una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$:

- Se realiza el cambio de variable $z = ax + by$.
  - La función $y(x)$ se cambia por $z(x)$; este cambio de variable transforma la ecuación en una ecuación de variables separables.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = 3x + 5y$.

Solución

1. Hacemos el cambio de variable $z = 3x + 5y$; entonces:

$$\frac{dz}{dx} = 3 + 5\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\frac{dz}{dx} - \frac{3}{5}$$

Por tanto, la ecuación diferencial será:

$$\frac{1}{5}\frac{dz}{dx}-\frac{3}{5}=z$$

2. Separamos las variables:

$$\frac{dz}{dx}=5z+3 \Rightarrow \frac{dz}{5z+3}=dx$$

3. Integramos:

$$\int\frac{dz}{5z+3}=\int dx$$

$$\frac{1}{5}\ln(5z+3)=x+C \Rightarrow \ln(5z+3)=5x+5C$$

$$e^{\ln(5z+3)}=e^{5x+5C}=Ae^{5x} \quad (A=e^{5C})$$

$$\Rightarrow 5z+3=Ae^{5x}$$

4. La solución z es:

$$z=\frac{A}{5}e^{5x}-\frac{3}{5}$$

5. Regresamos a la variable y.

Puesto que: $z=3x+5y$,

$$3x+5y=\frac{A}{5}e^{5x}-\frac{3}{5} \Rightarrow y=c_1e^{5x}-\frac{3}{5}x-\frac{3}{25}$$

6. Comprobación de la solución:

- Derivamos y con respecto a x:

$$y'=5c_1e^{5x}-\frac{3}{5}$$

- De y despejamos a c_1:

$$c_1=ye^{-5x}+\frac{3}{5}xe^{-5x}+\frac{3}{25}e^{-5x}$$

$$\Rightarrow y'=5\left(ye^{-5x}+\frac{3}{5}xe^{-5x}+\frac{3}{25}e^{-5x}\right)e^{5x}-\frac{3}{5}=5y+3x+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\Rightarrow y'=5y+3x$$

Alerta

En este caso, usamos la fórmula de integración:

$$\int\frac{du}{u}=\ln u$$

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y'=\dfrac{y-x+8}{y-x+1}$

Solución

1. Hacemos el cambio de la variable $z=y-x$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}+1$$

Entonces, la ecuación diferencial será:

$$\frac{dz}{dx}+1=\frac{z+8}{z+1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z+8}{z+1}-1=\frac{z+8-z-1}{z+1}=\frac{7}{z+1}$$

Esta ecuación ya es de variables separables:

$$(z+1)dz=7dx$$

2. Integramos:

$$\int (z+1)\,dz=\int 7\,dx$$

$$\frac{z^2}{2}+z=7x+C$$

3. Regresamos a la variable y.

Puesto que $z=y-x$, entonces:

$$\frac{(y-x)^2}{2}+y-x=7x+C$$

$$(y-x)^2+2(y-x)=14x+2C$$

$$y^2-2yx+x^2+2y-2x-14x=2C$$

4. Por tanto, la solución implícita de la ecuación es:

$$y^2-2yx+x^2+2y-16x=A$$

5. Comprobación de la solución:

- Derivamos la solución:

$$2yy'-2y-2xy'+2x+2y'-16=0$$

- Despejamos a y':

$$2yy'-2xy'+2y'=2y-2x+16$$

$$y'(2y-2x+2)=2(y-x+8)$$

$$y'=\frac{2(y-x+8)}{2(y-x+1)}=\frac{y-x+8}{y-x+1}$$

6. Obtenemos la ecuación diferencial.

Alerta

En este caso, usamos la fórmula de integración:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2.3 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones homogéneas

Las funciones homogéneas son aquellas en las que todos los términos son del mismo grado.

Problema resuelto

Determinar si la función $M(x, y) = x^2y + 8xy^2 - x^3 + y^3$ es de grado 3.

Solución

Ya que la suma de los exponentes del primer término es $x^2y \rightarrow 2 + 1 = 3$; la suma de los exponentes del segundo término es $8x^2y \rightarrow 1 + 2 = 3$; la suma del tercer término es $-x^3 \rightarrow 3$, y la suma del cuarto término es $y^3 \rightarrow 3$.

Otra forma de encontrar el grado de homogeneidad de una función es sustituir x por tx, y y por ty; por tanto, para la función que se está analizando:

$$M(tx, ty) = t^2x^2ty + 8txt^2y^2 - t^3x^3 + t^3y^3 = t^3M(x, y)$$

Problema resuelto

Determinar si la función $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ es homogénea e indicar su grado de homogeneidad.

Solución

$f(tx, ty) = \dfrac{tx}{ty} = \dfrac{x}{y} = t^0 f(x, y) = f(x, y)$ sí es homogénea, de grado cero.

Problema resuelto

Determinar si la función $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ es homogénea e indicar su grado de homogeneidad.

Solución

$f(tx, ty) = \sqrt{tx + ty} = \sqrt{t\left(x + y\right)} = t^{\frac{1}{2}}\sqrt{x + y} = t^{\frac{1}{2}} f(x, y)$, sí es homogénea, de grado $\dfrac{1}{2}$.

Ecuación diferencial homogénea

Una ecuación diferencial de la forma: $M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$ es homogénea si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado de homogeneidad. Una ecuación diferencial homogénea se transforma en una ecuación de variables separables haciendo el cambio de variable $y = ux$.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $xy' = y - x$.

Solución

1. Expresamos a la ecuación diferencial en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

Esta ecuación diferencial se puede expresar como:

$$xdy = (y - x)dx \Rightarrow xdy - (y - x)dx = 0$$

En este caso las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ están dadas por: $M(x, y) = x$ y $N(x, y) = -(x - y)$

2. Verificamos que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean funciones homogéneas del mismo grado de homogeneidad.

   Estas funciones son homogéneas de grado 1 ya que:

$$M(tx, ty) = tx = tM(x, y)$$

$$N(tx, ty) = -(tx - ty) = -t(x - y) = tN(x, y)$$

3. Realizamos el cambio de variable:

$$y = ux \Rightarrow dy = xdu + udx \text{ y } u = \frac{y}{x}$$

   La ecuación diferencial se transforma en:

$$x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) = ux - x$$

$$\Rightarrow$$

$$x^2\frac{du}{dx} + \cancel{ux} = \cancel{ux} - x \Rightarrow x^2\frac{du}{dx} = -x \Rightarrow du = -\frac{dx}{x}$$

4. Integramos:

$$\int du = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow u = -\ln x + c$$

Alerta

En este caso, usamos la siguiente fórmula de integración:

$$\int\frac{du}{u} = \ln u$$

5. Regresamos a la variable original $y \Rightarrow u = \frac{y}{x}$; entonces:

$$\frac{y}{x} = -\ln x + c \Rightarrow y = -x\ln x + cx$$

   Por tanto, la constante c se puede expresar como $c = \ln A$. Así:

$$y = -x\ln x + x\ln A$$

6. Comprobación de la solución:

   - Derivamos y con respecto a x:

$$y' = \ln A - \ln x - 1$$

   - Despejamos a $\ln A$:

$$y = -x\ln x + x\ln A \Rightarrow x\ln A = y + x\ln x \Rightarrow \ln A = \frac{y}{x} + \ln x$$

$$xy' = y - x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \ln x - \ln x - 1 = \frac{y}{x} - 1 \Rightarrow xy' = y - x$$

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

$$x^2 - y^2 = xyy'$$

Solución

1. Expresamos la ecuación diferencial en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

Esta ecuación diferencial se puede expresar como:

$$(x^2 - y^2)dx = xydy \Rightarrow -(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$$

Las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ están dadas por:

$$M(x, y) = -(x^2 - y^2) \text{ y } N(x, y) = xy$$

2. Verificamos que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean funciones homogéneas del mismo grado de homogeneidad.

Estas funciones son homogéneas de grado 2, ya que:

$$M(tx, ty) = -(t^2x^2 - t^2y^2) = -t^2(x^2 - y^2) = t^2M(x, y)$$

$$N(tx, ty) = txty = t^2xy = t^2N(x, y)$$

3. Se realiza el cambio de variable:

$$y = ux \Rightarrow dy = xdu + udx \text{ y } u = \frac{y}{x}$$

La ecuación diferencial se transforma en:

$$-\left(x^2 - (ux)^2\right)dx + x(ux)(xdu + udx) = 0$$

$$-x^2dx + x^2u^2dx + x^3udu + x^2u^2dx = 0$$

$$x^3udu + 2x^2u^2dx - x^2dx = 0$$

$$x^3udu = x^2(1 - 2u^2)dx$$

$$\Rightarrow \frac{u}{(1 - 2u^2)}du = \frac{dx}{x}$$

4. Integramos:

$$\int \frac{u}{(1 - 2u^2)}du = \int \frac{dx}{x}$$

Para la primera integral, sea $v = 1 - 2u^2$; entonces: $dv = -4udu \Rightarrow udu = -\frac{dv}{4}$.

Por tanto:

$$\int \frac{u}{(1 - 2u^2)}du = -\frac{1}{4}\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{4}\ln v$$

$$\int \frac{u}{(1 - 2u^2)}du = -\frac{1}{4}\ln(1 - 2u^2) = \ln(1 - 2u^2)^{-\frac{1}{4}} = \ln\left(\frac{1}{(1 - 2u^2)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

Alerta

Aquí usamos la fórmula de integración:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u$$

Y las propiedades de los logaritmos:

$$\ln a^b = b\ln a$$

$$\ln A + \ln B = \ln(AB)$$

Entonces:

$$\ln\left(\frac{1}{(1-2u^2)^{\frac{1}{4}}}\right) = \ln x + \ln C = \ln xC$$

5. Aplicamos la función exponencial en ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln\left(\frac{1}{(1-2u^2)^{\frac{1}{4}}}\right)} = e^{\ln xC} \Rightarrow \frac{1}{(1-2u^2)^{\frac{1}{4}}} = xC$$

6. Regresamos a la variable original $y \Rightarrow u = \dfrac{y}{x}$, entonces:

$$\frac{1}{(1-2u^2)^{\frac{1}{4}}} = xC$$

$$\frac{1}{\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}} = xC \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{x^2-2y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}} = xC$$

7. Elevamos toda la ecuación a la cuarta potencia:

$$\frac{x^2}{x^2-2y^2} = x^4C^4 \Rightarrow \frac{1}{C^4} = x^2\left(x^2-2y^2\right)$$

8. Haciendo $A = \dfrac{1}{C^4}$, la solución implícita es:

$$x^2(x^2-2y^2) = A$$

9. Comprobación de la solución:

- Derivamos la solución con respecto x:

$$2x(x^2-2y^2) + x^2(2x-4yy') = 0$$

$$4x^3 - 4xy^2 - 4x^2yy' = 0$$

- Factorizamos:

$$4x(x^2-y^2) = 4x^2yy' \Rightarrow (x^2-y^2) = \frac{4x^2yy'}{4x} = xyy'$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = xyy'$$

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ pueden reducirse a ecuaciones diferenciales homogéneas, conforme lo siguiente:

Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ se cortan en (x_0, y_0), haciendo el cambio de variable $X = x - x_0$ y de función $Y = y - y_0$, la ecuación se reduce a una homogénea.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial: $y' = \dfrac{x + 2y + 2}{2x + y - 4}$.

Solución

1. Establecer dónde se intersecan las rectas $x + 2y + 2 = 0$ y $2x + y - 4 = 0$. Así, resolvemos el sistema:

$$x + 2y = -2$$
$$2x + y = 4$$

Por consiguiente, el determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

Y las soluciones son:

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-2 - 8) = \frac{10}{3}$$

$$y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(4 + 4) = -\frac{8}{3}$$

Así, el punto de intersección es:

$$\left(\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

2. Hacemos el cambio de variable $X = x - \dfrac{10}{3}$ y de función $Y = y + \dfrac{8}{3}$; entonces, la ecuación diferencial toma la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{X + \frac{10}{3} + 2\left(Y - \frac{8}{3}\right) + 2}{2\left(X + \frac{10}{3}\right) + Y - \frac{8}{3} - 4} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$$

3. Expresamos la ecuación diferencial en la forma:

$$M(X, Y)dX + N(X, Y)dY = 0$$

Esta ecuación diferencial se puede expresar como:

$$-(X + 2Y)dX + (2X + Y)dY = 0$$

Las funciones $M(X, Y)$ y $N(X, Y)$ están dadas por:

$$M(X, Y) = -(X + 2Y) \text{ y } N(X, Y) = 2X + Y$$

4. Verificamos que las funciones $M(X, Y)$ y $N(X, Y)$ sean funciones homogéneas del mismo grado de homogeneidad.

Estas funciones son homogéneas de grado 1, ya que:

$$M(tX, tY) = -(tX + 2tY) = -t(X + 2Y) = tM(X, Y)$$

$$N(tX, tY) = 2tX + tY = t(2X + Y) = tN(X, Y)$$

5. Realizamos el cambio de variable:

$$Y = uX \Rightarrow dY = Xdu + udX \text{ y } u = \frac{Y}{X}$$

$$-(X + 2uX)dX + (2X + uX)(Xdu + udX) = 0$$

$$-XdX - 2uXdX + 2X^2du + uX^2du + 2XudX + u^2XdX = 0$$

$$(2 + u)X^2du + (\cancel{2u} + u^2 - 1 - \cancel{2u})XdX = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2 + u)}{(u^2 - 1)}du = -\frac{dX}{X}$$

6. Integramos:

$$\int \frac{(2 + u)}{(u^2 - 1)}du = -\int \frac{dX}{X}$$

Entonces:

$$\frac{3}{2}\ln(u - 1) - \frac{1}{2}\ln(u + 1) = -\ln X + \ln C$$

7. Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\ln(u - 1)^{\frac{3}{2}} - \ln(u + 1)^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{C}{X}$$

$$\ln\left(\frac{(u - 1)^{\frac{3}{2}}}{(u + 1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \ln\frac{C}{X}$$

8. Aplicamos la función exponencial en ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln\left(\frac{(u-1)^{\frac{3}{2}}}{(u+1)^{\frac{1}{2}}}\right)} = e^{\ln\frac{C}{X}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(u - 1)^{\frac{3}{2}}}{(u + 1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{C}{X}$$

9. Regresamos a la variable original Y, sustituyendo $u = \frac{Y}{X}$ en la expresión que obtuvimos:

$$\left(\frac{\left(\frac{Y}{X} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{Y}{X} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{C}{X} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{1}{X^3}(Y - X)^3}{\frac{1}{X}(Y + X)}} = \frac{1}{X}\sqrt{\frac{(Y - X)^3}{(Y + X)}} = \frac{C}{X} \Rightarrow \sqrt{\frac{(Y - X)^3}{(Y + X)}} = C$$

Alerta

La integral $\circ\frac{(2+u)}{(u^2-1)}du$ se resuelve por el método de fracciones parciales, que se relaciona a continuación:

Primero, se factoriza el término:

$$(u^2 - 1) = (u - 1)(u + 1)$$

Entonces:

$$\frac{(2+u)}{(u^2-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1) + B(u-1)}{u^2-1}$$

$$\frac{(2+u)}{(u^2-1)} = \frac{u(A+B) + A - B}{u^2-1}$$

$\circ$

$A + B = 1$

$A - B = 2$

Después, se suman estas ecuaciones y obtenemos:

$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$, sustituyendo en $A + B = 1$,

entonces: $\frac{3}{2} + B = 1 \Rightarrow B = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\frac{(2+u)}{(u^2-1)} = \frac{3}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)}$$

$$\circ\frac{(2+u)}{(u^2-1)}du = \circ\frac{3du}{2(u-1)} - \circ\frac{1du}{2(u+1)}$$

$$\circ\frac{(2+u)}{(u^2-1)}du = \frac{3}{2}\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u+1)$$

10. Regresamos a la variable x y a la función y, y sustituimos:

$$X = x - \frac{10}{3} \qquad y \qquad Y = y + \frac{8}{3}$$

Así:

$$\sqrt{\frac{\left(y + \frac{8}{3} - \left(x - \frac{10}{3}\right)\right)^3}{\left(y + \frac{8}{3} + x - \frac{10}{3}\right)}} = C$$

11. La solución implícita es:

$$\sqrt{\frac{(y - x + 6)^3}{\left(y + x - \frac{2}{3}\right)}} = C$$

12. Comprobación de la solución:

- Derivamos la solución con respecto a x:

$$\left(\frac{(y-x+6)^3}{\left(y+x-\frac{2}{3}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{3}{2}(y-x+6)^2(y'-1)\left(y+x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}(y-x+6)^3(y'+1)}{\left(y+x-\frac{2}{3}\right)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(y-x+6)^2(y'-1)\left(y+x-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}(y-x+6)^3(y'+1) = 0$$

$$\Rightarrow 3(y'-1)\left(y+x-\frac{2}{3}\right)-(y-x+6)(y'+1) = 0$$

- Desarrollando:

$$3\left(yy' + xy' - \frac{2}{3}y' - y - x + \frac{2}{3}\right) - (yy' - xy' + 6y' + y - x + 6) = 0$$

$$3yy' - yy' + 3xy' + xy' - 2y' - 6y' - 3y - y - 3x + x + 2 - 6 = 0$$

$$2yy' + 4xy' - 8y' - 4y - 2x - 4 = 0$$

- Despejamos a y':

$$2y'(y + 2x - 4) = 2(2y + x + 2)$$

$$\boxed{y' = \frac{x + 2y + 2}{2x + y - 4}}$$

Las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ pueden reducirse a ecuaciones diferenciales homogéneas si $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ son rectas paralelas y se hace el cambio de función $z = ax + by$. Transformándose, así, la ecuación en una de variables separables.

Problema resuelto

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{x + y + 2}{x + y - 4}$.

Solución

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente; expresando a las rectas $x+y+2=0$ y $x+y-4=0$ en su forma pendiente ordenada $y=mx+b$.

Así, $y=-x-2$ y $y=-x+4$, constituyen rectas que tienen la misma pendiente, por tanto, son paralelas.

1. Hacemos el cambio de función $z=x+y$:

Si $z=x+y \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}+1 \Rightarrow y'=z'-1$, la ecuación diferencial toma la forma:

$$z'-1=\frac{z+2}{z-4} \Rightarrow z'=\frac{z+2}{z-4}+1=\frac{z+2+z-4}{z-4}=\frac{2z-2}{z-4}$$

2. Separamos las variables:

$$\frac{z-4}{2z-2}dz=dx$$

3. Integramos:

$$\int\frac{z-4}{2z-2}dz=\int dx$$

4. Realizamos la división $\frac{z-4}{2z-2}$:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2} \\ 2z-2 & z-4 \\ & -z+1 \\ \hline & -3 \end{array} \Rightarrow \frac{z-4}{2z-2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2z-2}$$

$$\int\frac{z-4}{2z-2}dz=\int\frac{1}{2}dz-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z-1}=\frac{z}{2}-\frac{3}{2}\ln(z-1)$$

$$\frac{z}{2}-\frac{3}{2}\ln(z-1)=x+C$$

5. Regresamos a la función *y*:

$$\frac{x+y}{2}-\frac{3}{2}\ln(x+y-1)=x+C$$

La solución implícita es:

$$-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\ln(x+y-1)=C$$

6. Comprobación de la solución:

- Derivamos la solución con respecto a *x*:

$$-\frac{1}{2}+\frac{y'}{2}-\frac{3(1+y')}{2(x+y-1)}=0$$

- Despejamos:

$$(y'-1)(x+y-1)=3+3y'$$

$$y'x+y'y-4y'-x-y-2=0$$

$$y'x+y'y-4y'=x+y+2$$

$$y'(x+y-4)=x+y+2 \Rightarrow y'=\frac{x+y+2}{x+y-4}$$

2.4 Ecuaciones diferenciales exactas

Diferencial total

La diferencial total de la función $z = f(x, y)$ se expresa como:

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

donde f_x y f_y son las derivadas parciales de la función $f(x, y)$ respecto de las dos variables independientes x y y además, se supone que estas derivadas parciales son continuas en una región R del plano.

Problema resuelto

Encontrar la diferencial total de la función $z = 4x^2y - 2xy^3 + 3x$.

Solución

Calculamos las derivadas parciales respecto de x y a y:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 2y^3 + 3$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 6xy^2$$

Entonces, la diferencial total de la función $z = 4x^2y - 2xy^3 + 3x$ es:

$$dz = (8xy - 2y^3 + 3)\,dx + (4x^2 - 6xy^2)\,dy$$

Ecuación diferencial exacta

La ecuación diferencial $M(x, y)dx = N(x, y)\,dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si y solo si el primer miembro de la ecuación es una diferencial exacta; esto significa que: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$. Determinar la solución de una ecuación diferencial exacta es, pues, encontrar la función $f(x, y)$ tal que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada.

Puesto que $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ derivando a M, respecto de y, y a N respecto de x, obtenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Del cálculo sabemos que si las derivadas parciales son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Condición de exactitud

Si la ecuación diferencial $M(x, y)dx = N(x, y)\,dy = 0$ es exacta, se debe satisfacer que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Problema resuelto

Comprobar que la ecuación diferencial $(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0$ es exacta.

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = 2x - 5y + 2 \ \text{ y } \ N(x, y) = 1 - 6y - 5x$$

Entonces, derivamos a M respecto de y, y a N respecto de x:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x - 5y + 2) = -5 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(1 - 6y - 5x) = -5 \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Puesto que sí se satisface la condición de exactitud, la ecuación diferencial es exacta.

Método de solución de una ecuación diferencial exacta

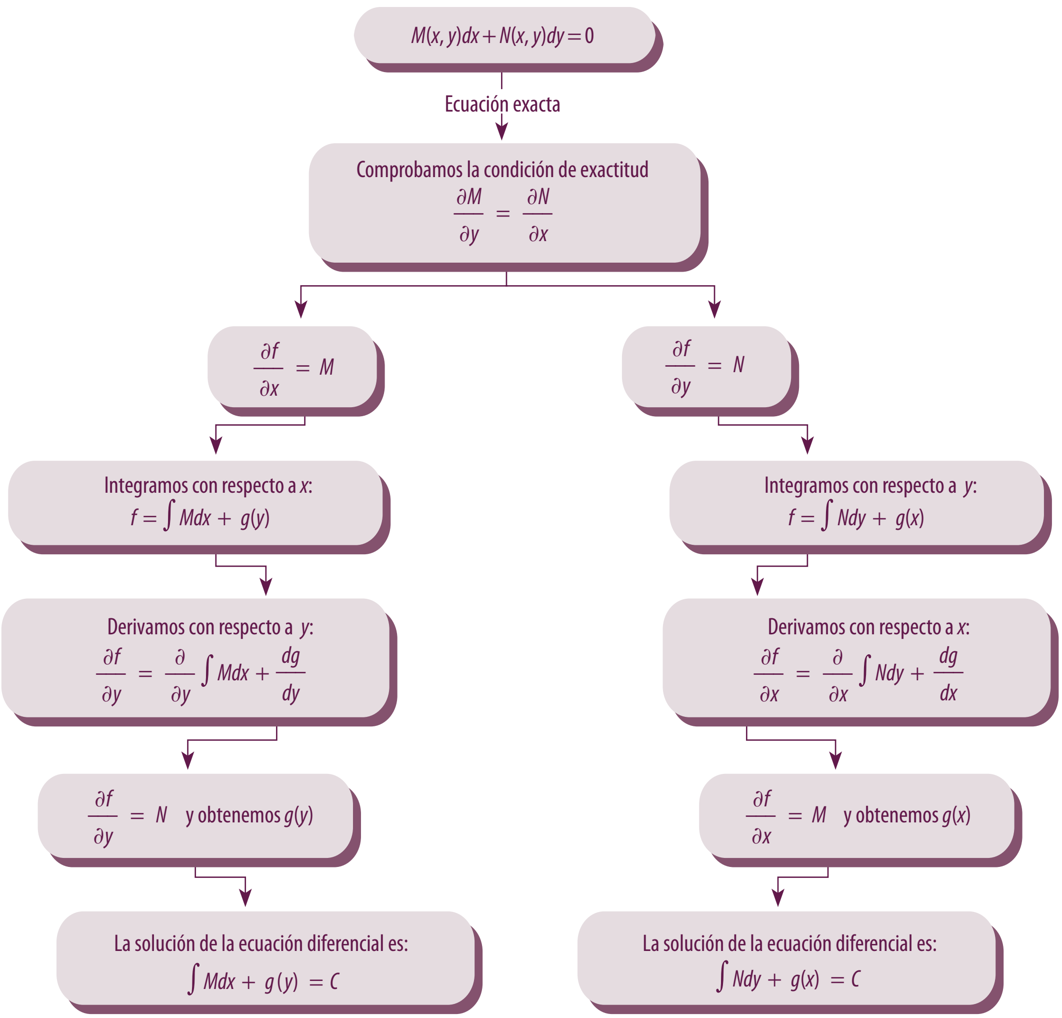


Figura 2.1

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial $(2x - 5y + 2)dx + (1 - 6y - 5x)dy = 0$.

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = 2x - 5y + 2 \text{ y } N(x, y) = 1 - 6y - 5x$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x - 5y + 2)}{\partial y} = -5$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1 - 6y - 5x) = -5$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial sí es exacta.

2. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y + 2$$

$$f = \int (2x - 5y + 2)\,dx + g(y)$$

$$f = x^2 - 5xy + 2x + g(y)$$

3. Derivamos a f respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5x + \frac{dg}{dy}$$

4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ a N:

$$-5x + \frac{dg}{dy} = 1 - 6y - 5x \Rightarrow \frac{dg}{dy} = 1 - 6y$$

5. Integramos:

$$g(y) = \int (1 - 6y)\,dy = y - 3y^2$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$x^2 - 5xy + 2x + y - 3y^2 = C$$

6. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$2x - 5y - 5xy' + 2 + y' - 6yy' = 0$$

- Despejamos a y':

$$y' = \frac{-2x + 5y - 2}{-5x + 1 - 6y} = -\frac{(2x - 5y + 2)}{(1 - 6y - 5x)} \Rightarrow (1 - 6y - 5x)\,dy = -(2x - 5y + 2)\,dx$$

$$(2x - 5y + 2)\,dx + (1 - 6y - 5x)\,dy = 0$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial $\left(1-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=0$.

Solución

En este caso:

$$M(x,y)=1-\frac{y}{x^2}e^{y/x} \text{ y } N(x,y)=1+\frac{1}{x}e^{y/x}$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)=-e^{y/x}\left(\frac{x+y}{x^3}\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)=-e^{y/x}\left(\frac{x+y}{x^3}\right)$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial sí es exacta.

2. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=1+\frac{1}{x}e^{y/x}$$

3. Integramos respecto de y:

$$f=\int\left(1+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=y+e^{y/x}+g(x)$$

4. Derivamos a f respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{y/x}+\frac{dg}{dx}$$

5. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ a M:

$$-\frac{y}{x^2}e^{y/x}+\frac{dg}{dx}=1-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\Rightarrow\frac{dg}{dx}=1$$

6. Integramos:

$$g(x)=\int dx=x$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y+e^{y/x}+x=C$$

7. Comprobación:

- Derivamos la solución implícita respecto de x:

$$y'+\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)e^{y/x}+1=0$$

$$y'+\frac{y'}{x}e^{y/x}=\frac{y}{x^2}e^{y/x}-1$$

$$y'=\frac{\frac{y}{x^2}e^{y/x}-1}{\left(1+\frac{e^{y/x}}{x}\right)}\Rightarrow\left(1-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=0$$

Factores integrantes

Una ecuación diferencial que no es exacta se puede convertir en exacta a través de un factor integrante apropiado.

Método para encontrar un factor integrante

1. Si el factor integrante μ es solo función de x: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$; donde $p(x) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$.

2. Si el factor integrante μ es solo función de y: $\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$; donde $p(y) = \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$

3. Si $H(xy) = \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$ solo depende del producto xy; el factor integrante μ es función de $z = xy$ y está dado por $\mu(z) = e^{\int H(z)\,dz}$.

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial $x^2 \text{sen}\, x dx + xy dy = 0$ usando un factor integrante apropiado.

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = x^2 \text{sen}\, x \;\text{ y }\; N(x, y) = xy$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \text{sen}\, x) = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

Puesto que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

2. Construimos el factor integrante $\mu(x)$:

$$p(x) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{0 - y}{xy} = -\frac{1}{x}$$

Por tanto:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

3. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$x^{-1}x^2 \text{sen}\, x dx + x^{-1} xy dy = 0$$

$$x \text{ sen}\, x dx + y dy = 0$$

4. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \operatorname{sen} x) = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial ya es exacta.

5. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y$$

6. Integramos:

$$f = \int y dy = \frac{y^2}{2} + g(x)$$

7. Derivamos a f respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{dx}$$

8. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ a M:

$$\frac{dg}{dx} = x \operatorname{sen} x$$

9. Integramos:

$$g(x) = \int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$\frac{y^2}{2} + \operatorname{sen} x - x \cos x = C$$

10. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x

$$yy' + \cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x = 0$$

$$yy' + x \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x \operatorname{sen} x}{y} \Rightarrow x \operatorname{sen} x dx + y dy = 0$$

- Multiplicamos esta última ecuación por x y obtenemos:

$$x^2 \operatorname{sen} x dx + xy dy = 0$$

Alerta

La integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ la realizamos por partes:

Primero hacemos:

$u = x$, $dv = \operatorname{sen} x dx$

Entonces:

$du = dx$, $v = -\cos x$

Luego, usamos la fórmula de la integración por partes:

$\int u dv = uv - \int v du$

Entonces:

$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x +$

$\int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial $(e^x + y^2)dx + \left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)dy = 0$ usando un factor integrante apropiado.

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = e^x + y^2 \;\; \text{y} \;\; N(x, y) = xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x + y^2) = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right) = y - \frac{e^x}{y}$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

2. Construimos el factor integrante $\mu(y)$, entonces:

$$p(y) = \frac{y - \frac{e^x}{y} - 2y}{e^x + y^2} = -\frac{\frac{e^x}{y} + y}{e^x + y^2} = -\frac{\frac{e^x + y^2}{y}}{e^x + y^2} = -\frac{1}{y}$$

Por tanto:

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = y^{-1}$$

3. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$\left(\frac{e^x}{y} + y\right)dx + \left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)dy = 0$$

4. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{y} + y\right) = -\frac{e^x - y^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right) = -\frac{e^x - y^2}{y^2}$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial ya es exacta.

5. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{e^x}{y^2} - 2y$$

6. Integramos:

$$f = \int\left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)dy = xy + \frac{e^x}{y} - y^2 + g(x)$$

7. Derivamos a *f* respecto de *x*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{e^x}{y} + \frac{dg}{dx}$$

8. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ a *M*:

$$y + \frac{e^x}{y} + \frac{dg}{dx} = \frac{e^x}{y} + y \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 0 \Rightarrow g = C$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$xy + \frac{e^x}{y} - y^2 = C$$

9. Comprobamos:

- Derivamos la solución respecto de *x*:

$$y + xy' + \frac{e^x}{y} - \frac{e^x}{y^2}y' - 2yy' = 0$$

- Despejamos a y':

$$\left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)y' = -\frac{e^x}{y} - y$$

$$y' = -\frac{\left(y + \frac{e^x}{y}\right)}{\left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)} \Rightarrow \left(y + \frac{e^x}{y}\right)dx + \left(x - \frac{e^x}{y^2} - 2y\right)dy = 0$$

$$\frac{1}{y}(y^2 + e^x)dx + \frac{1}{y}\left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)dy = 0$$

- Multiplicamos por *y*:

$$(y^2 + e^x)dx + \left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)dy = 0$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial $\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)dx + x^2dy = 0$, usando un factor integrante apropiado.

Solución

En este caso:

$$M(x, y) = xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}} \text{ y } N(x, y) = x^2$$

1. Comprobamos la condición de exactitud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right) = x - 2x^2e^{-xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta.

2. Construimos:

$$H(xy) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} = \frac{2x - x + 2x^2e^{-xy}}{x\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right) - yx^2} = \frac{x + 2x^2e^{-xy}}{\cancel{x^2y} + x + \frac{2x^2}{e^{xy}} - \cancel{yx^2}} = 1$$

Entonces, si $z = xy$, $\mu(z) = e^{\int H(z)\,dz} = e^{\int dz} = e^z$.

Así, el factor integrante es: $\mu(xy) = e^{xy}$.

3. Multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$(xye^{xy} + e^{xy} + 2x)dx + x^2e^{xy}dy = 0$$

Entonces:

$$M(x, y) = xye^{xy} + e^{xy} + 2x \text{ y } N(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xye^{xy} + e^{xy} + 2x) = 2xe^{xy} + x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2e^{xy})}{\partial x} = 2xe^{xy} + x^2e^{xy}$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial ya es exacta.

4. Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{xy}$$

5. Integramos:

$$f = \int x^2e^{xy}dy = x^2\frac{e^{xy}}{x} + g(x) = xe^{xy} + g(x)$$

6. Derivamos a f respecto de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + \frac{dg}{dx}$$

7. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ a M:

$$e^{xy} + xye^{xy} + \frac{dg}{dx} = xye^{xy} + e^{xy} + 2x \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 2x \Rightarrow g(x) = x^2$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$xe^{xy} + x^2 = C$$

8. Comprobación:

- Derivamos la solución $2x + e^{xy} + xe^{xy}(y + xy') = 0$.
- Despejamos y':

$$y' = -\frac{2x + e^{xy}}{x^2e^{xy}} - \frac{y}{x} = \frac{-2x - e^{xy} - yxe^{xy}}{x^2e^{xy}}$$

$$y'x^2e^{xy} + (2x + e^{xy} + yxe^{xy}) = 0$$

- Dividimos entre e^{xy}

$$x^2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{e^{xy}} + 1 + xy\right) = 0 \Rightarrow \left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)dx + x^2dy = 0$$

Ecuación lineal de primer orden

La ecuación lineal de primer orden es una ecuación que puede representarse en la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

Donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ solo dependen de la variable independiente x; y no dependen de y.

Dividiendo a la ecuación $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$, entre $a_1(x)$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Esta última expresión se conoce como la **forma canónica** de la ecuación lineal de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Para encontrar la solución de la ecuación 1, determinamos el factor integrante dependiente de x:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \qquad (2)$$

Ahora, determinemos $\mu(x)$, de tal manera que el lado derecho de la ecuación 2 sea precisamente la derivada del producto $\mu(xy)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

Entonces, se debe satisfacer que:

$$\frac{d\mu}{dx}y = \mu(x)p(x)y \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu(x)} = p(x)dx \Rightarrow \ln\mu = \int p\,dx$$

Por tanto, el factor integrante está dado por:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx}$$

Usando este factor integrante en la ecuación diferencial, resulta:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)q(x)$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx + C$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

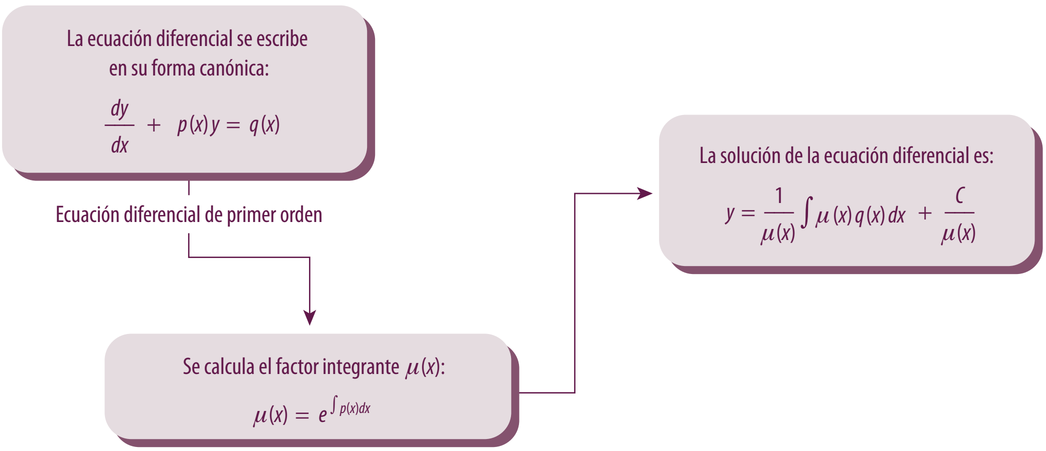


Figura 2.2

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $\left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx + 3dy = 0$.

Solución

1. Escribimos la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{8}{3}$$

Así, en este caso: $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = \frac{8}{3}$.

2. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{x}\int \frac{8}{3}x\,dx + \frac{C}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{8}{3}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{C}{x} = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x}$$

3. Comprobación:

❍ Derivamos la solución:

$$y' = \frac{4}{3} - \frac{C}{x^2}$$

❍ Y de la ecuación $y = \frac{4}{3}x + \frac{C}{x} \Rightarrow C = \left(y - \frac{4}{3}x\right)x = yx - \frac{4}{3}x^2$:

sustituimos C en y':

$$y' = \frac{4}{3} - \frac{yx - \frac{4}{3}x^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{y}{x} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \frac{y}{x}$$

❍ Multiplicamos por 3:

$$3y' = 8 - 3\frac{y}{x} \Rightarrow 3\frac{dy}{dx} + \left(3\frac{y}{x} - 8\right) = 0$$

$$\left(3\frac{y}{x} - 8\right)dx + 3dy = 0$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $xy' - 5y = x^6 \sec^2 x$.

Solución

1. Escribimos la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^5 \sec^2 x$$

En este caso, $p(x) = -\frac{5}{x}$ y $q(x) = x^5 \sec^2 x$.

2. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{5dx}{x}} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5}$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$y = x^5\int x^{-5}x^5 \sec^2 x dx + Cx^5 = x^5\int \sec^2 x dx + Cx^5$$

$$y = x^5 \tan x + Cx^5$$

3. Comprobación:

❍ Derivamos la solución:

$$y' = x^5 \sec^2 x + 5x^4 \tan x + 5Cx^4$$

❍ De $y = x^5 \tan x + Cx^5$ despejamos a C:

$$C = \frac{y - x^5 \tan x}{x^5} = \frac{y}{x^5} - \tan x$$

❍ Sustituimos en y':

$$y' = x^5 \sec^2 x + 5x^4 \tan x + 5\left(\frac{y}{x^5} - \tan x\right)x^4$$

$$y' = x^5 \sec^2 x + \cancel{5x^4 \tan x} + 5\frac{y}{x} - \cancel{5x^4 \tan x} = x^5 \sec^2 x + 5\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y' - 5\frac{y}{x} = x^5 \sec^2 x$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $x^2y' + 2xy = e^{3x}$.

Solución

1. Escribimos la ecuación diferencial en su forma canónica:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

En este caso, $p(x) = \frac{2}{x}$ y $q(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}$.

2. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2dx}{x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{1}{x^2}\int x^2\left(\frac{e^{3x}}{x^2}\right)dx + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int e^{3x} dx + \frac{C}{x^2} = \frac{e^{3x}}{3x^2} + \frac{C}{x^2}$$

3. Comprobación:

- Derivamos la función solución:

$$y' = -\frac{2C}{x^3} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \frac{2}{3x^3}e^{3x}$$

- De $y = \frac{e^{3x}}{3x^2} + \frac{C}{x^2}$ despejamos a C:

$$C = x^2y - \frac{e^{3x}}{3}$$

- Sustituimos en y':

$$y' = -\frac{2\left(x^2y - \frac{e^{3x}}{3}\right)}{x^3} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \frac{2}{3x^3}e^{3x}$$

$$y' = -\frac{2y}{x} + \cancel{\frac{2e^{3x}}{3x^3}} + \frac{1}{x^2}e^{3x} - \cancel{\frac{2}{3x^3}e^{3x}} = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{x^2}e^{3x}$$

- Multiplicamos por x^2, la ecuación anterior:

$$x^2y' = -2yx + e^{3x} \Rightarrow x^2y' + 2xy = e^{3x}$$

Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de primer orden que puede escribirse en la forma: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo (a, b) y n es un número real, es una ecuación de Bernoulli.

Cuando $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación es una ecuación diferencial lineal y se puede resolver por el método antes descrito.

Para resolver la ecuación de Bernoulli, primero se hace el cambio de variable $v = y^{1-n}$, el que transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Luego se multiplica la ecuación de Bernoulli por y^{-n}; entonces:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)yy^{-n} = q(x)y^ny^{-n}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Después, se realiza el cambio de variable:

$$v = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{dv}{dx}$$

Entonces:

$$\cancel{y^{-n}}\frac{1}{(1-n)\cancel{y^{-n}}}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

Como se puede observar, esta ecuación ya es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Método para resolver ecuaciones diferenciales de Bernoulli

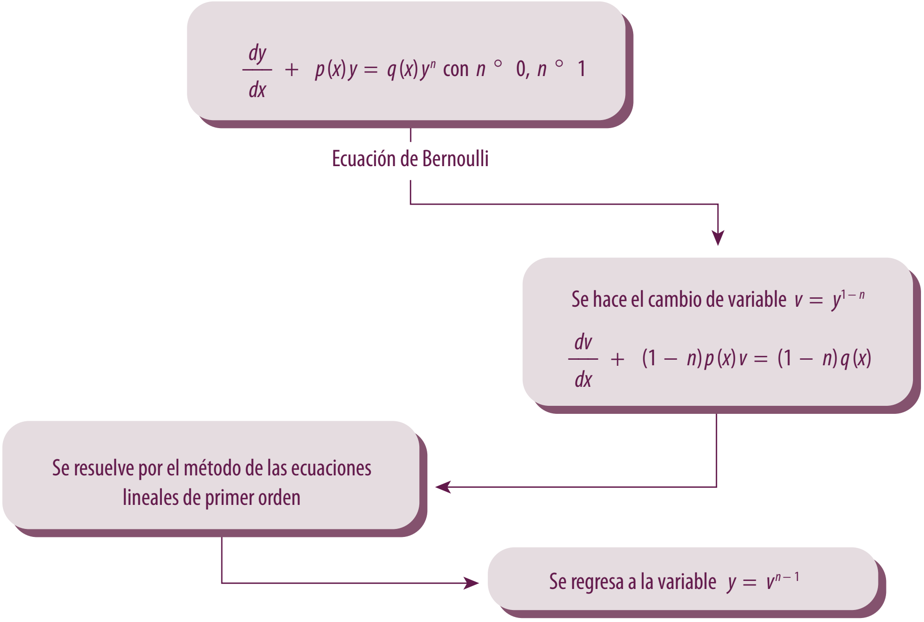


Figura 2.3

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.

Solución

1. En este caso $n = 3$, hacemos el cambio de variable $v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$:

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y^{-3}}\frac{dv}{dx} = -.5y^3\frac{dv}{dx}$$

2. Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$-.5y^3\frac{dv}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$$

3. Dividimos entre $-.5y^3$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{5}{-.5y^3}y = -\frac{5}{2}\frac{xy^3}{(-.5y^3)}$$

$$\frac{dv}{dx} + 10y^{-2} = 5x$$

$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x$$

Esta última ecuación ya es una ecuación diferencial lineal de primer orden escrita en su forma canónica.

4. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 10\,dx} = e^{10x}$

Así, la solución de la ecuación diferencial es: $v = \dfrac{1}{\mu(x)}\displaystyle\int \mu(x)q(x)\,dx + \dfrac{C}{\mu(x)}$

$$v = \frac{1}{e^{10x}}\int e^{10x}5x\,dx + \frac{C}{e^{10x}} = e^{-10x}(5)\left(\frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{100}e^{10x}\right) + Ce^{-10x}$$

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

Entonces, para obtener la solución, regresamos a la variable y:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

5. Comprobación:

❍ Derivamos la solución:

$$-\frac{2}{y^3}y' = \frac{1}{2} - 10Ce^{-10x}$$

❍ De la ecuación $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{20} + Ce^{-10x}$ despejamos a C:

$$C = \frac{e^{10x}}{y^2} - \frac{xe^{10x}}{2} + \frac{e^{10x}}{20}$$

❍ Sustituimos:

$$-\frac{2}{y^3}y' = \frac{1}{2} - 10\left(\frac{e^{10x}}{y^2} - \frac{xe^{10x}}{2} + \frac{e^{10x}}{20}\right)e^{-10x}$$

$$-\frac{2}{y^3}y' = \frac{1}{2} - 10\left(\frac{1}{y^2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{20}\right)$$

$$-\frac{2}{y^3}y' = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{10}{y^2} + 5x - \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \left(-\frac{10}{y^2} + 5x\right)\left(-\frac{y^3}{2}\right) = 5y - \frac{5}{2}y^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^3y^2$

Solución

1. En este caso $n = 2$; hacemos el cambio de variable $v = y^{1-2} = y^{1-2} = y^{-1}$, entonces:

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^{-2}}\frac{dv}{dx} = -y^2\frac{dv}{dx}$$

2. Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$-y^2\frac{dv}{dx}+\frac{y}{x}=x^3y^2$$

3. Dividimos entre $-y^2$:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{y}{y^2x}=-x^3$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=-x^3\Rightarrow\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=-x^3$$

Así, esta última ecuación ya es una ecuación diferencial lineal de primer orden escrita en su forma canónica.

4. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$: $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$v=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)q(x)\,dx+\frac{C}{\mu(x)}$$

$$v=-\frac{1}{\frac{1}{x}}\int\frac{1}{x}x^3dx+\frac{C}{\frac{1}{x}}=-x\int x^2dx+Cx=-\frac{x^4}{3}+Cx$$

$$v=-\frac{x^4}{3}+Cx$$

5. Regresamos a la variable y:

$$\frac{1}{y}=-\frac{x^4}{3}+Cx$$

6. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$-\frac{1}{y^2}y'=-\frac{4x^3}{3}+C$$

- De la solución despejamos a C:

$$\frac{1}{y}=-\frac{x^4}{3}+Cx\Rightarrow C=\frac{1}{yx}+\frac{x^3}{3}$$

- Sustituimos en la derivada:

$$-\frac{1}{y^2}y'=-x^3+\frac{1}{yx}\Rightarrow y'=x^3y^2-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3y^2$$

Ecuación de Riccati

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ es una ecuación de Riccati generalizada. Si se conoce una solución de la ecuación de Riccati, dígase $u(x)$, el cambio de variable $y = u + \frac{1}{v}$ reduce a la ecuación de Riccati a una ecuación diferencial lineal de primer orden en v.

Demostración:

1. Se realiza el cambio de variable $y = u + \frac{1}{v}$, entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$. Por consiguiente la ecuación diferencial de Riccati toma la forma:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = P(x)\left(u + \frac{1}{v}\right)^2 + Q(x)\left(u + \frac{1}{v}\right) + R(x)$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = P(x)\left(u^2 + 2\frac{u}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + Q(x)\left(u + \frac{1}{v}\right) + R(x)$$

$$\frac{du}{dx} - u^2P(x) - uQ(x) - R(x) = \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}(2uP + Q) + \frac{P}{v^2}$$

2. La función u satisface la ecuación de Riccati, entonces: $\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)$. De esta manera:

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}(2uP + Q) + \frac{P}{v^2} = 0$$

3. Se multiplica la ecuación anterior por v^2; así pues, obtenemos la ecuación diferencial lineal en v:

$$\frac{dv}{dx} + v(2uP + Q) + P = 0$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$, si se conoce la solución $u(x) = 2$.

Solución

1. Identificamos esta ecuación con la ecuación de Riccati: $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$; entonces: $P(x) = 1$, $Q(x) = -1$, $R(x) = -2$. Haciendo el cambio de variable $y = 2 + \frac{1}{v}$, se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden para v, que es $\frac{dv}{dx} + v(2uP + Q) + P = 0$; por tanto: $\frac{dv}{dx} + 3v = -1$.

2. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$.

   Así, la solución de la ecuación diferencial es: $v = -\frac{1}{e^{3x}}\int e^{3x}dx + \frac{C}{e^{3x}} = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x}$

   Por tanto:

$$y = 2 + \frac{1}{v} = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}}$$

3. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$y' = -\frac{-3Ce^{-3x}}{\left(-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}\right)^2}$$

- Despejamos a C de la solución:

$$y\left(-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}\right) = 2\left(-\frac{1}{3} + Ce^{-3x}\right) + 1$$

$$-\frac{y}{3} + yCe^{-3x} = -\frac{2}{3} + 2Ce^{-3x} + 1$$

$$C = \frac{y+1}{3e^{-3x}(y-2)}$$

- Sustituimos C en y':

$$y' = \frac{3\frac{y+1}{3\cancel{e^{-3x}}(y-2)}\cancel{e^{-3x}}}{\left(-\frac{1}{3} + \frac{y+1}{3\cancel{e^{-3x}}(y-2)}\cancel{e^{-3x}}\right)^2} = \frac{\cancel{3}\frac{y+1}{\cancel{3}(y-2)}}{\left(\frac{\cancel{-y}+2+\cancel{y}+1}{3(y-2)}\right)^2} = \frac{\frac{y+1}{(y-2)}}{\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}(y-2)^2}} = \frac{(y-2)^{\cancel{2}}(y+1)}{(\cancel{y-2})}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$, si se conoce la solución $u(x) = \frac{2}{x}$.

Solución

1. Identificamos esta ecuación con la ecuación de Riccati: $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$; entonces:

$P(x) = 1,\ Q(x) = -\frac{1}{x},\ R(x) = -\frac{4}{x^2}$.

2. Hacemos el cambio de variable $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{v}$; entonces, se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden para v:

$$\frac{dv}{dx} + v(2uP + Q) + P = 0$$

Por tanto:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = -1$$

3. Calculamos el factor integrante $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$

Así, la solución de la ecuación diferencial es: $v = -\frac{1}{x^3}\int x^3 dx + \frac{C}{x^3} = -\frac{x}{4} + Cx^{-3}$

Por tanto:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{v} = \frac{2}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{4} + Cx^{-3}}$$

4. Comprobación:

- Derivamos la solución respecto de x:

$$y' = \frac{\left(\frac{3C}{x^4} + \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{C}{x^3} - \frac{1}{4}x\right)^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{\frac{3C + x^4}{4x^4}}{\left(\frac{4C - x^4}{4x^3}\right)^2} - \frac{2}{x^2}$$

- De la solución despejamos a C:

$$C = \frac{x^3}{y - \frac{2}{x}} + \frac{x^4}{4} = \frac{x^3}{\frac{xy - 2}{x}} + \frac{x^4}{4} = \frac{2x^4 + x^5 y}{4(xy - 2)}$$

- Sustituimos en y':

$$y' = \frac{\left(\frac{3\left(\frac{2x^4 + x^5 y}{4(xy-2)}\right)}{x^4} + \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{\frac{2x^4 + x^5 y}{4(xy-2)}}{x^3} - \frac{1}{4}x\right)^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{\frac{xy+1}{xy-2}}{\left(\frac{x}{xy-2}\right)^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2}(xy+1)(xy-2) - \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{4}{x^2} - \frac{y}{x}$$

Problemas para resolver

Encuentra la solución general de las ecuaciones diferenciales de los problemas 2.1 a 2.10, usando variables separables:

2.1 $y' = 8 + 2x - 3x^2$

2.2 $y' = (4 + 3x)^4$

2.3 $y' = e^{3x} + 2x$

2.4 $y' = e^{x-y}$

2.5 $y' = \frac{\cos^2 x}{y}$

2.6 $y' = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{y}$

2.7 $y' = \ln x - 9x^2$

2.8 $y' = \frac{e^{-x}}{\operatorname{sen} y}$

2.9 $y' = \frac{y^2}{1 + x^2}$

2.10 $y' = e^{3x+2y}$

ALERTA: La vida media de un material radiactivo es el tiempo necesario para que se desintegre la mitad del material inicial.

Desintegración radiactiva

SR **2.11** Si después de 1 000 segundos, una muestra de un material radiactivo ha decaído en 50% respecto de la cantidad inicial, encuentra la constante de decaimiento y la vida media de este elemento radiactivo.

ALERTA: Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_a\right)$$

Ley del enfriamiento de Newton

SR **2.12** De acuerdo con la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo, T, y la temperatura del aire, T_0. Si la temperatura del aire es de 20 °C y el cuerpo se enfría en 20 minutos, desde 100 °C hasta 60 °C, ¿en cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30 °C?

Crecimiento de un cultivo de bacterias

SR **2.13** En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de aumento de población es proporcional al número presente en cualquier instante. Si se sabe que el número original se ha duplicado en 12 horas. ¿Qué número de población se debe esperar al cabo de 24 horas?

SR **2.14** Cuando se produce cierto alimento, se estima en N el número de organismos de una cierta clase presentes en un paquete. Al cabo de 60 días, el número N aumenta a 1 000N. Sin embargo, el número 200N es considerado como el límite saludable. ¿A los cuantos días, después de elaborado, caduca el alimento en cuestión?

SR **2.15** Un depósito contiene 50 litros de salmuera con 1 kilogramo de sal disuelta en esta. Se introduce en el depósito salmuera que contiene disuelto 0.1 kilogramo de sal por litro a razón de 15 litros por minuto; entonces, la mezcla, bien revuelta, se deja salir a una tasa de 20 litros por minuto. Determina el tiempo para el cual ya no hay sal en el depósito.

Cantidad de medicamento

SR **2.16** Un suero transporta cierto medicamento dentro de un órgano de 500 cm^3 de volumen a una tasa de entrada de 10 cm^3/s y sale a la misma tasa. La concentración del medicamento en el suero es de 0.08 g/cm^3, suponiendo que inicialmente no había medicamento presente en el órgano, encuentra la concentración del medicamento en el órgano después de 30 segundos y 120 segundos, respectivamente.

Encuentra la solución general de las ecuaciones diferenciales de los problemas 2.17 a 2.21:

2.17 $y' = 4x + 3y$

2.18 $y' = x + 2y$

2.19 $y' - 5y = x^2$

2.20 $y' = (x + y)^2$

2.21 $y' = \cos(x + y)$

Encuentra la solución general de las ecuaciones diferenciales homogéneas de los problemas 2.22 a 2.31:

2.22 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

2.23 $2x^2ydx = (3x^3 + y^3)dy$

2.24 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + 1$

2.25 $\left(x^2e^{\frac{-y}{x}} + y^2\right)dx = xydy$

2.26 $\left(y + x\cot\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx - xdy = 0$

2.27 $y' = \dfrac{3y - 4x}{2y - 3x}$

2.28 $(x^2 + 2xy)y' = -2y^2 - 3xy$

2.29 $x^2 - y^2 = xyy'$

2.30 $x + xy' = y$

2.31 $(y + x)y' = x - y$

Encuentra la solución general de las ecuaciones diferenciales exactas de los problemas 2.32 a 2.36:

2.32 $(2x + 4)dx + (3y - 1)dy = 0$

2.33 $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dx = 0$

2.34 $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dx = 0$

2.35 $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)dy$

2.36 $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)dx + (3xy^2 + 2y\cos x)dy = 0$

Encuentra el factor integrante y la solución de las ecuaciones diferenciales de los problemas 2.37 a 2.41:

2.37 $\left(\dfrac{y}{x}\cos xy + \dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen} xy + 3y^3\right)dx + (\cos xy + 3xy^2)dy = 0$

2.38 $\left(2 + \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + 2\right)dy = 0$

2.39 $\left(y + \dfrac{1}{e^{xy}}\right)dx + \left(x + \dfrac{1}{e^{xy}}\right)dy = 0$

2.40 $xy' - 5y = x^6 \sec^2 x$

2.41 $x^2y' + 2xy = e^{3x}$

Encuentra el factor integrante y la solución general de las ecuaciones diferenciales de los problemas 2.42 a 2.51:

2.42 $\left(\dfrac{3y}{x} - 8\right) + 3y' = 0$

2.43 $y' - 2y = -6$

2.44 $y' - 2y = x$

Problemas para resolver

2.45 $y' - xy = x^2 e^{\frac{x^2}{2}}$

2.46 $xy' - 2x^2y = e^{x^2}$

2.47 $y' + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\operatorname{sen} x}$

2.48 $y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = \dfrac{1}{1+x^2}$

2.49 $y' + (\ln x)y = \ln x$

2.50 $y' + (1 + 3x^2)y = 3 + 9x^2$

2.51 $y' + (\sec x)y = \cos x$

Resuelve las ecuaciones diferenciales de Bernoulli de los problemas 2.52 a 2.61:

2.52 $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$

2.53 $3(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

2.54 $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$

2.55 $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}$

2.56 $xy(1 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1$

2.57 $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$

2.58 $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

2.59 $y' + \dfrac{y}{x} = x^3y^2$

2.60 $y' + y = y^3e^{2x}$

2.61 $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{3xy}$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati de los problemas 2.62 a 2.66:

2.62 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + \dfrac{y}{x} - 2y^2$ con solución $u(x) = x$

2.63 $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$ con solución $u(x) = -e^x$

2.64 $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2$ con solución $u(x) = \tan x$

2.65 $\dfrac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2$ con solución $u(x) = -2$

2.66 $\dfrac{dy}{dx} = 9 + 6y + y^2$ con solución $u(x) = -3$

PROBLEMA RETO

1

En una empresa, la razón de crecimiento del volumen de ventas de un producto, a medida que el precio x decrece, es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia entre el precio x y una constante b.

a) Expresa matemáticamente el problema planteado.

b) Interpreta el significado del parámetro i.

c) Determina la relación entre el volumen de ventas y el precio x; es decir, la solución general.

d) Comprueba la solución determinada.

e) Obtén la solución particular que satisface $y(50) = 1$ y represéntala gráficamente.

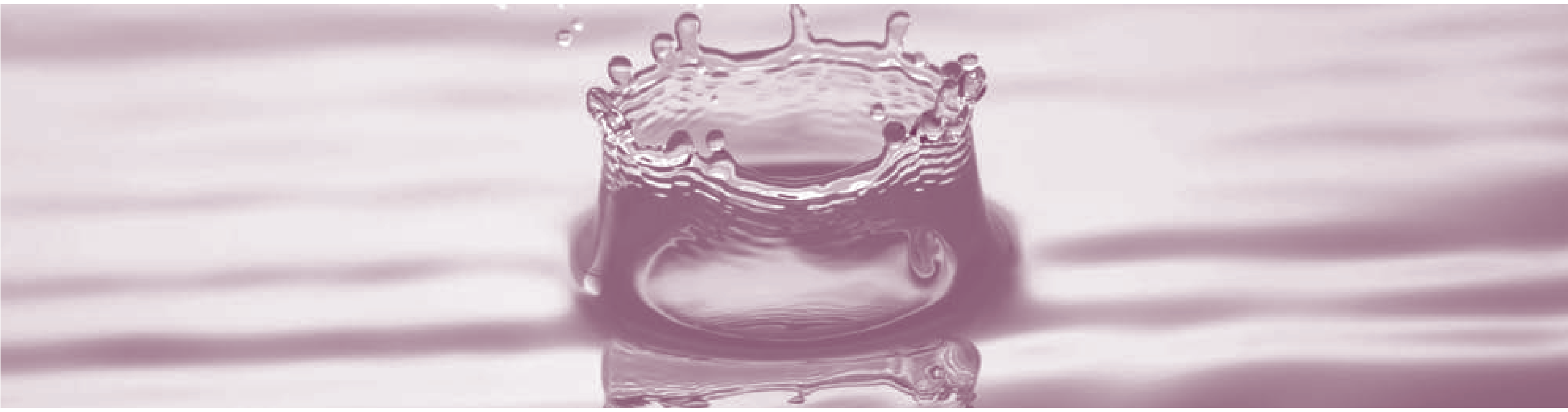
REFERENCIAS

Zill, Dennis G. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.* 8ª edición, Cengage. México.

Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Prentice-Hall. México.

Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, 4ª edición. Mir. Moscú.

UNIDAD 3



Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

OBJETIVOS

- Conocer los diferentes métodos para la solución de ecuaciones diferenciales de orden mayor o igual a 2.
- Conocer métodos de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Modelar y resolver diferentes fenómenos.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial de segundo orden?
- ¿Cuántos métodos de solución para resolver una ecuación diferencial de segundo orden existen?
- ¿Cómo reducir el orden de una ecuación diferencial?
- ¿Dónde se aplican los sistemas de ecuaciones diferenciales?

3.1 Introducción

En la unidad 2 tratamos el proceso de solución de las ecuaciones diferenciales lineales. Ahora, en esta unidad, estudiamos las ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor o igual a 2. En general, las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

Cuando $h(x) = 0$, se dice que la ecuación diferencial lineal es homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Si las funciones $a_i(x)$ con $i = 0,\ldots, n$ son números, se dice que la ecuación diferencial lineal tiene coeficientes constantes; por ejemplo, la ecuación $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden con coeficientes constantes homogénea.

Las ecuaciones lineales constituyen una clase especial de ecuaciones cuyo estudio está profundamente relacionado con los conceptos del álgebra lineal. En el caso especial de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, las soluciones se pueden expresar por completo en términos de funciones elementales, un hecho ya conocido por J. L. Lagrange hacia finales del siglo XVIII. Esto las hace especialmente aptas para servir como un primer modelo para aquellos procesos físicos que tengan características lineales, o aproximadamente lineales, como los que se relacionan en la teoría de pequeñas oscilaciones, la teoría de circuitos eléctricos, etcétera. En los procesos de linealización, las ecuaciones lineales también resultan útiles en la etapa inicial del estudio de problemas no lineales.

Sabido lo anterior, iniciamos con el proceso de solución de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes.

3.2 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes

Una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes se presenta en el movimiento armónico simple, en el cual, la magnitud de la fuerza ejercida sobre la partícula es directamente proporcional a su elongación, es decir la distancia x a la que se encuentra la partícula con respecto a su posición de equilibrio. De esta forma, la fuerza está dada por $F_x = -kx$, donde k es una constante positiva y x es la elongación. El signo negativo en la ecuación indica que en todo momento la fuerza que actúa sobre la partícula está dirigida hacia la posición de equilibrio; esto es, en dirección contraria a su elongación.

Aplicando la segunda ley de Newton, el movimiento armónico simple se define en una dimensión mediante la ecuación diferencial:

$$\left.\begin{array}{r} F = ma = mx'' \\ F = -kx \end{array}\right\} mx'' = -kx \Rightarrow mx'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \text{ o } x'' + \omega^2 x = 0 \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.3 Método de solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

El método de solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes se define como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

Entonces, como solución se propone:

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$$

Puesto que $e^{\lambda x} \neq 0$, para toda $x \in (-\infty, \infty)$:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Esta es la ecuación auxiliar o característica de la ecuación diferencial de segundo orden, cuyas soluciones son:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Así, aquí se presentan tres casos:

1. Si $a^2 - 4b > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ raíces reales.
2. Si $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ raíces reales e iguales.
3. Si $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta$ complejas.

Caso 1

Si las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Caso 2

Si las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Caso 3

Si las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = Ae^{ax} \cos \beta x + Be^{ax} \operatorname{sen} \beta x$$

Resumiendo:

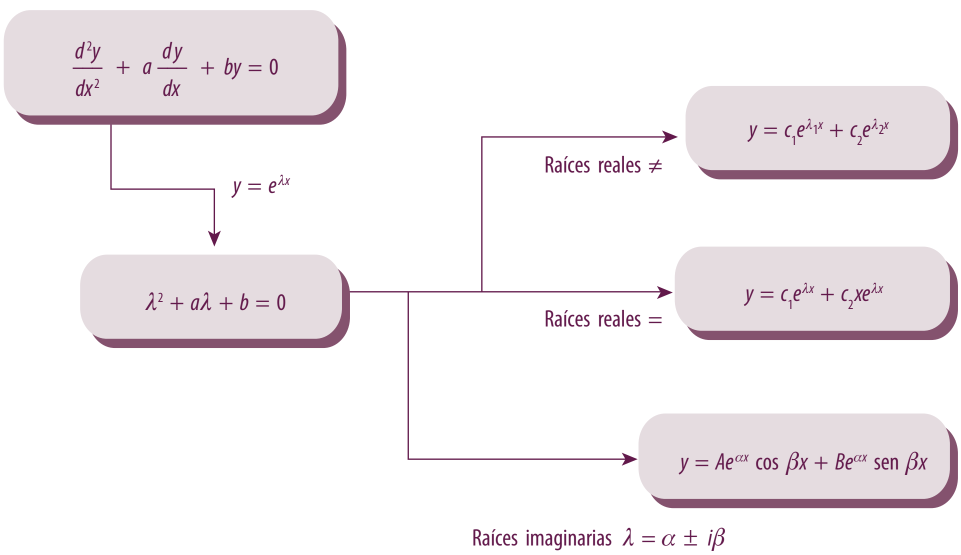


Figura 3.1

A continuación se presenta un problema resuelto como ejemplo del caso 1.

Problema resuelto

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Solución

1. Primero, se propone la solución $y = e^{\lambda x}$; entonces, la ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

2. Luego, resolvemos la ecuación característica usando la fórmula general:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Las soluciones son distintas; por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$$

Comprobación de la solución

Ahora, derivamos la solución con respecto a x:

$$y' = 3c_1e^{3x} + 2c_2e^{2x}$$

Luego, derivamos otra vez:

$$y'' = 9c_1e^{3x} + 4c_2e^{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&y'' - 5y' + 6y = 0\\
&9c_1e^{3x} + 4c_2e^{2x} - 5(3c_1e^{3x} + 2c_2e^{2x}) + 6(c_1e^{3x} + c_2e^{2x}) =\\
&9c_1e^{3x} + 4c_2e^{2x} - 15c_1e^{3x} - 10c_2e^{2x} + 6c_1e^{3x} + 6c_2e^{2x}) =\\
&e^{3x}(9c_1 - 15c_1 + 6c_1) + e^{2x}(4c_2 - 10c_2 + 6c_2) = 0
\end{aligned}$$

Alerta

Fórmula general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A continuación se presenta un problema resuelto como ejemplo del caso 2.

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden:

$$4y'' - 12y' + 9y = 0$$

Solución

1. Primero, dividimos esta ecuación entre 4, esto es:

$$y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 0$$

2. Luego, proponemos la solución $y = e^{\lambda x}$; entonces, la ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0$$

3. Ahora, resolvemos la ecuación característica usando la fórmula general:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\left(\frac{9}{4}\right)}}{2} = \frac{3 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Las raíces son iguales, entonces la solución es:

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$

Comprobación de la solución

Derivamos la solución:

$$y' = \frac{3}{2} c_1 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2} c_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$

Luego, derivamos otra vez:

$$y'' = \frac{9}{4} c_1 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{9}{4} c_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$

Por último, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$4\left(\frac{9}{4} c_1 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{9}{4} c_2 x e^{\frac{3}{2}x}\right) - 12\left(\frac{3}{2} c_1 e^{\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2} c_2 x e^{\frac{3}{2}x}\right) + 9\left(c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x}\right) = 0$$

$$9c_1 e^{\frac{3}{2}x} + 9c_2 x e^{\frac{3}{2}x} - 18c_1 e^{\frac{3}{2}x} - 18c_2 x e^{\frac{3}{2}x} + 9c_1 e^{\frac{3}{2}x} + 9c_2 x e^{\frac{3}{2}x} = 0$$

$$c_1 e^{\frac{3}{2}x} \underbrace{(9 - 18 + 9)}_{=0} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x} \underbrace{(9 - 18 + 9)}_{=0} = 0$$

A continuación se presenta un problema resuelto como ejemplo del caso 3.

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden:

$$5y'' + 3y' + 7y = 0$$

Solución

1. Primero, dividimos, esta ecuación entre 5, esto es:

$$y'' + \frac{3}{5} y' + \frac{7}{5} y = 0$$

2. Luego, proponemos la solución $y = e^{\lambda x}$; entonces, la ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 + \frac{3}{5}\lambda + \frac{7}{5} = 0$$

3. Resolvemos la ecuación característica usando la fórmula general:

$$\lambda = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{7}{5}\right)}}{2} = \frac{-\frac{3}{5} \pm \sqrt{-\frac{131}{25}}}{2}$$

En este caso, el discriminante es negativo, por tanto las soluciones son complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{10} + \frac{i}{10}\sqrt{131},\ \lambda_2 = -\frac{3}{10} - \frac{i}{10}\sqrt{131}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{10},\ \beta = \frac{\sqrt{131}}{10}$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = Ae^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right) + Be^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)$$

Comprobación de la solución

Derivamos respecto de x la solución:

$$y' = \left(-\frac{3A}{10} + \frac{\sqrt{131}B}{10}\right)e^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right) + \left(-\frac{3B}{10} - \frac{\sqrt{131}A}{10}\right)e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)$$

Luego, derivamos otra vez:

$$y'' = e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(\frac{3\sqrt{131}A}{50} - \frac{61B}{50}\right) + Be^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(-\frac{61A}{50} - \frac{3\sqrt{131}B}{50}\right)$$

Por último, sustituimos en la ecuación diferencial $5y'' + 3y' + 7y = 0$:

$$5\left(e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(\frac{3\sqrt{131}A}{50} - \frac{61B}{50}\right) + Be^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(-\frac{61A}{50} - \frac{3\sqrt{131}B}{50}\right)\right)$$

$$+3\left(\left(-\frac{3A}{10} + \frac{\sqrt{131}B}{10}\right)e^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right) + \left(-\frac{3B}{10} - \frac{\sqrt{131}A}{10}\right)e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\right)$$

$$+7\left(Ae^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right) + Be^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(7A + 3\left(-\frac{3A}{10} + \frac{\sqrt{131}B}{10}\right) - 5A\left(\frac{61}{50}\right) - \frac{15B\sqrt{131}B}{50}\right)$$

$$+e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(7B + 3\left(-\frac{3B}{10} - \frac{\sqrt{131}A}{10}\right) - 5B\left(\frac{61}{50}\right) + \frac{15A\sqrt{131}}{50}\right)$$

$$= e^{-\frac{3x}{10}}\cos\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(7A - \frac{9A}{10} - \frac{61}{10}A + \frac{3\sqrt{131}B}{10} - \frac{3B\sqrt{131}B}{10}\right)$$

$$+e^{-\frac{3x}{10}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{131}}{10}x\right)\left(7B - \frac{9B}{10} - \frac{61B}{10} - \frac{3\sqrt{131}A}{10} + \frac{3A\sqrt{131}}{10}\right) = 0$$

3.4 Aplicación de la ecuación diferencial lineal de segundo orden: movimiento armónico simple

Un resorte ejerce una fuerza, F, sobre una partícula de masa, m, que es proporcional al desplazamiento, x, y de sentido contrario a este, tal como podemos apreciar en la figura 3.2.

El desplazamiento, x, se mide desde la posición **O** de equilibrio, donde el resorte se encuentra sin deformar. Cuando el resorte está comprimido ($x < 0$), ejerce una fuerza sobre la partícula dirigida hacia la derecha; en cambio, cuando el resorte está estirado ($x > 0$), ejerce una fuerza hacia la izquierda (véase figura 3.2).

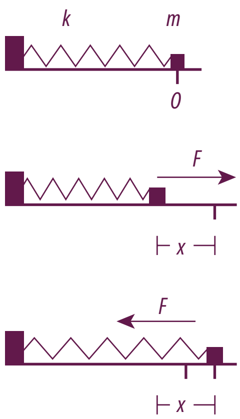


Figura 3.2

Si estiramos o comprimimos el resorte de constante k, unido a una partícula de masa, m, y lo soltamos, veremos que el resorte empieza a oscilar. A partir de la medida del periodo de dichas oscilaciones, podemos determinar la constante elástica del resorte.

Ahora, aplicamos la segunda ley de Newton al sistema formado por la partícula de masa, m, y el resorte de constante, k:

$$ma = -kx$$

Expresada en forma de ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Esta es la ecuación de un **movimiento armónico simple** (MAS) de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y periodo $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

La ecuación de movimiento del movimiento armónico simple está dada por:

$$x'' + \omega^2 x = 0 \text{ donde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para resolverla, determinamos su ecuación característica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\,\omega i$$

Puesto que son dos raíces complejas conjugadas, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$x = Ae^{a} \cos \beta t + Be^{a} \operatorname{sen} \beta t$$

En este caso:

$$\alpha = 0, \beta = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frecuencia de oscilación}$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\,(\omega t + \phi) = \cos \omega t \,\text{sen}\, \phi + \text{sen}\, \omega t \cos \phi$$

La solución de la ecuación de movimiento del MAS se puede escribir como:

$$x = A\text{sen}(\omega t + \phi)$$

Donde A y ϕ se determinan a partir de las condiciones iniciales: posición inicial y velocidad inicial de la partícula.

La velocidad, v, de la partícula se obtiene derivando x con respecto al tiempo:

$$v = A\omega \cos\,(\omega t + \phi)$$

La aceleración, a, se obtiene derivando la velocidad, v, respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t + \phi) = -A\omega^2 x$$

Así, llegamos a la ecuación del movimiento de la partícula:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t + \phi) = -A\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt} = -A\omega^2 x \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Problema resuelto

Se fija un contrapeso de 4 kg a un resorte cuya constante es 16 N/m. ¿Cuál es el periodo del MAS?

Solución

La ecuación de movimiento está dada por:

$$4\frac{d^2x}{dt^2} = -16x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -4x$$

El periodo del MAS es:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\text{kg}}{16\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\,\cancel{\text{kg}}}{16\,\frac{\cancel{\text{kg}}\,\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{m}}\text{s}^2}}} = \frac{2\pi}{2}\text{s} = \pi\text{s}$$

Problema resuelto

Se fija una masa de 20 kg a un resorte. Si la frecuencia del MAS es $\frac{4}{\pi}$ oscilaciones por segundo, ¿cuál es la constante k del resorte?

Solución

El periodo es:

$$P = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\text{s}}\right)} = \frac{\pi}{4}\text{s}$$

Por tanto, el periodo del MAS está dado por:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow P^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{P^2}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{P^2} = \frac{4\pi^2(4\text{ kg})}{\left(\frac{\pi}{4}\text{s}\right)^2} = 256\ \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Problema resuelto

Una partícula describe un movimiento oscilatorio armónico simple (MAS), de forma que su aceleración máxima es de 18 m/s² y su velocidad máxima es de 3 m/s. Determinar:

a) La frecuencia de oscilación de la partícula.

b) La amplitud del movimiento.

Solución

La posición de la partícula es:

$$x = A\text{sen}(\omega t + \phi)$$

Su velocidad es:

$$v = x' = A\omega\ \cos(\omega t + \phi)$$

Su aceleración es:

$$a = x'' = -A\omega^2\ \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Puesto que las funciones seno y coseno oscilan en el intervalo (–1, 1), los valores de la $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$ son:

$$v_{\text{máx}} = A\omega \text{ y } a_{\text{máx}} = A\omega^2$$

A partir de estos valores despejamos su frecuencia:

$$\frac{a_{\text{máx}}}{v_{\text{máx}}} = \frac{A\omega^2}{A\omega} = \omega = \frac{18\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6\,\frac{1}{\text{s}} = 6\text{ Hz}$$

Y despejamos su amplitud:

$$A = \frac{v_{\text{máx}}}{\omega} = \frac{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\,\frac{1}{\text{s}}} = 0.5\text{ m}$$

3.5 Ecuación de Cauchy-Euler

Las ecuaciones de Euler y Cauchy-Euler son ecuaciones lineales con coeficientes variables que pueden transformarse, mediante un cambio de variables, en ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

La ecuación de Cauchy-Euler es de la forma:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0 \text{ donde } a, b \in R$$

Para encontrar su solución, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$
$$m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = 0$$
$$x^m\,[m(m-1) + am + b] = 0$$

Como:

$$x^m \neq 0$$

La ecuación auxiliar es:

$$m(m-1) + am + b = 0$$
$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

Caso 1

Si las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 x^{m1} + c_2 x^{m2}$$

Caso 2

Si las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 x^m + c_2(\ln x)x^m$$

Caso 3

Si las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = x^{\alpha}(A\cos(\ln x^{\beta}) + B\operatorname{sen}(\ln x^{\beta}))$$

Problema resuelto

Determinar la solución general de la siguiente ecuación:

$$x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$$

Solución

Hacemos $y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}$, y sustituimos en la ecuación diferencial:

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + 3xmx^{m-1} + 10x^m = 0$$
$$m(m-1)x^m + 3mx^m + 10x^m = 0$$

La ecuación característica a resolver es:

$$m(m-1) + 3m + 10 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 10 = 0$$

Así, las soluciones son:

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(10)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3i = \alpha \pm \beta i$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = x^{-1}(A\cos(\ln x^3) + B\operatorname{sen}(\ln x^3)) = \frac{A}{x}\cos(\ln x^3) + \frac{B}{x}\operatorname{sen}(\ln x^3)$$

3.6 Ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que dos

Sea:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = 0$$

Donde $a_0, a_1, \dots a_{n-1}, a_n$ son constantes. Entonces, se propone que cada derivada $y^{(n)} = m^n$; así, su polinomio característico es:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = P_n(m)$$

Por ejemplo, supongamos que podemos factorizar este polinomio:

$$P_n(m) = (m - m_1)(m - m_2)(m - m_3)^3(m^2 - 2\alpha_1 m + \alpha_1^2 + \beta_1^2)(m^2 - 2\alpha_2 m + \alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

Entonces, la solución general está dada por:

$$y = C_1 e^{m1x} + C_2 e^{m2x} + C_3 e^{m3x} + C_4 x e^{m3x} + C_5 x^2 e^{m3x} + C_6 e^{a1x} \cos \beta_1 x + C_7 e^{a1x} \operatorname{sen} \beta_1 x$$
$$+ C_8 e^{a2x} \cos \beta_2 x + C_9 e^{a2x} \operatorname{sen} \beta_2 x + C_{10} x e^{a2x} \cos \beta_2 x + C_{11} x e^{a2x} \operatorname{sen} \beta_2 x$$

Problema resuelto

Determinar la solución general de la siguiente ecuación:

$$y^{(4)} + y = 0$$

Solución

Primero, hacemos $y^{(4)} = m^4$ y sustituimos en la ecuación diferencial; entonces, la ecuación característica es:

$$m^4 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica:

$$m^4 = -1 \Rightarrow \begin{cases} m_1^2 = +i = e^{\frac{i\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} m_1^+ = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_1^- = -\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ m_2^2 = -i = e^{\frac{i\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} m_2^+ = \left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_2^- = -\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$y = Ae^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x + Ce^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + De^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

Factorizando:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Comprobación de la solución

Derivamos a y:

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x - A\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x - D\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Ahora, derivamos a y', para obtener y'':

$$y'' = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(-A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x - D\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Nuevamente derivamos y obtenemos y''':

$$y''' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(-A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x - A\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x - B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x - C\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Derivando una vez más obtenemos $y^{(4)}$:

$$y^{(4)} = -e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y^{(4)} + y = 0$$

$$-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + D\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0$$

3.7 Solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo grado no homogéneas

La solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo grado no homogénea es de la forma:

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{solución de la homogénea}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{solución particular}}$$

Para encontrar la solución particular, existen dos métodos:

1. Método de variación de parámetros.
2. Método de los coeficientes indeterminados.

Método de variación de parámetros

Sea la ecuación diferencial:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

1. Se resuelve la ecuación diferencial homogénea:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Así, su solución es:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

2. Se propone como solución de la ecuación no homogénea:

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Se deriva y_p a condición de que $u'y_1 + v'y_2 = 0$:

$$\begin{aligned} &y_p = uy_1 + vy_2 \\ &y'_p = uy'_1 + u'y_1 + vy'_2 + v'y_2 \\ &u'y_1 + v'y_2 = 0 \Rightarrow y'_p = uy'_1 + v'y_2 \\ &y''_p = uy''_1 + u'y'_1 + vy''_2 + v'y'_2 \end{aligned}$$

3. Se sustituyen la función y las derivadas en la ecuación no homogénea:

$$\begin{aligned} &(uy''_1 + u'y'_1 + vy''_2 + v'y'_2) \\ &+ f(x)(uy'_1 + v'y_2) + g(x)(uy_1 + vy_2) = h(x) \end{aligned}$$

$$u\underbrace{(y''_1 + f(x)y'_1 + g(x)y_1)}_{0} + v\underbrace{(y''_2 + f(x)y'_2 + g(x)y_2)}_{0} + (u'y'_1 + v'y'_2) = h(x)$$

Entonces, se debe satisfacer que:

$$u'y'_1 + vy''_2 = h(x)$$

La solución propuesta es:

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

Esta solución propuesta debe satisfacer:

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

Y

$$u'y'_1 + v'y'_2 = h(x)$$

Resolviendo el sistema usando la regla de Cramer:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & h(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}$$

Al determinante $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$ se le llama **wronskiano**.

Si el wronskiano es diferente de cero u' y v', entonces existen y están dadas como:

$$u = -\int \frac{y_2h(x)}{W}dx \quad \text{y} \quad v = \int \frac{y_1h(x)}{W}dx$$

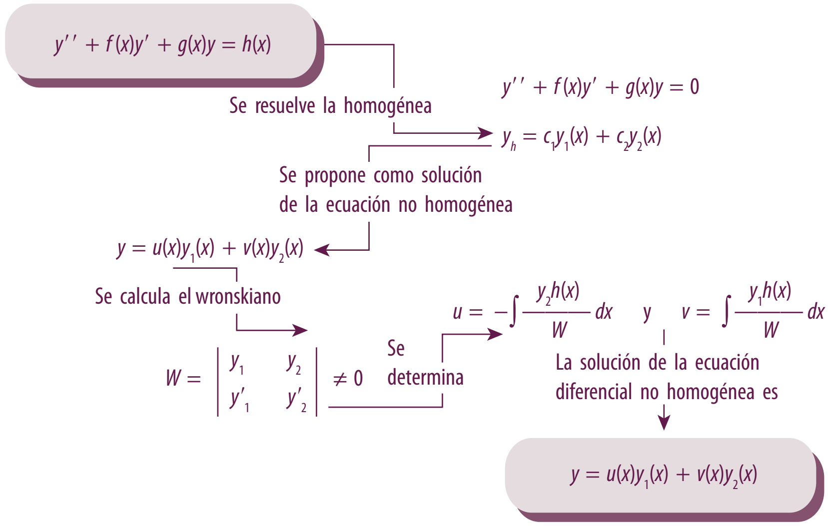


Figura 3.3 Método de variación de parámetros.

Problema resuelto

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' + 2y = \text{sen}(e^x)$$

Solución

La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea es:

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{-3+\sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \\ m_2 = \dfrac{-3-\sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

Entonces, la solución de la homogénea es:

$$y_h = C_1e^{-x} + C_1e^{-2x}$$

Esto es:

$$y_1 = e^{-x} \text{ y } y_2 = e^{-2x}$$

Como solución de la ecuación no homogénea se propone:

$$y_p = u(x)e^{-x} + v(x)e^{-2x}$$

Ahora, se calcula el wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

En este caso, $h(x) = \text{sen}(e^x)$. Entonces:

$$u = -\int \frac{y_2h(x)}{W}dx \quad \text{y} \quad v = \int \frac{y_1h(x)}{W}dx$$

$$u = -\int \frac{e^{-2x}\text{sen}(e^x)}{-e^{-3x}}dx = \int e^x\text{sen}(e^x)\,dx = -\cos(e^x)$$

$$v = \int \frac{e^{-x}\text{sen}(e^x)}{-e^{-3x}}dx = -\int e^{2x}\text{sen}(e^x)\,dx = e^x\cos(e^x) - \text{sen}(e^x)$$

Alerta

Integramos por partes:

$$\int e^{2x}\text{sen}(e^x)\,dx =$$

$$u = e^x \rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = e^x\text{sen}(e^x)dx \rightarrow v = \cos(e^x)$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = (e^x)\cos(e^x) - \int e^x\cos(e^x)dx = (e^x)\cos(e^x) - \text{sen}(e^x)$$

Por tanto, la solución de la particular es:

$$y_p = -e^{-x}\cos(e^x) + (e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x))e^{-2x} = \cancel{-e^{-x}\cos(e^x)} + \cancel{e^{-x}\cos(e^x)} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$$

$$y_p = -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$$

Así, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$$

Comprobación de la solución

Para esto, derivamos y con respecto a x:

$$y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x} + 2e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) - e^{-x}\cos(e^x)$$
$$y'' = C_1e^{-x} + 4C_2e^{-2x} - 4e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) + 2e^{-2x}e^x\cos(e^x) + e^{-x}\cos(e^x) + e^{-x}e^x\operatorname{sen}(e^x)$$
$$y'' = C_1e^{-x} + 4C_2e^{-2x} - 4e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) + 3e^{-x}\cos(e^x) + \operatorname{sen}(e^x)$$

$$\cancel{C_1e^{-x}} + \cancel{4C_2e^{-2x}} - \cancel{4e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)} + \overline{3e^{-x}\cos(e^x)} + \operatorname{sen}(e^x)$$

$$+3\left(\cancel{-C_1e^{-x}}\ \cancel{-2C_2e^{-2x}} + \cancel{2e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)} - \overline{e^{-x}\cos(e^x)}\right)$$

$$+2\left(\cancel{C_1e^{-x}} + \cancel{C_2e^{-2x}}\ \cancel{-e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}\right) = \operatorname{sen}(e^x)$$

Operador anulador

Si $y = f(x)$ es una función que tiene n derivadas y $L(D)$ es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, tal que:

$$L(D) = L(D)f(x) = 0$$

decimos que el operador $L(D)$ es el anulador de $y = f(x)$.

Así, por ejemplo:

- Si $y = c$, entonces $\dfrac{dc}{dx} = 0 \Rightarrow D = \dfrac{d}{dx}$ es el anulador de c.
- Si $y = x$, entonces $\dfrac{d^2}{dx^2}(x) = \dfrac{d}{dx}(1) = 0 \Rightarrow D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2}$ es el anulador de x.
- Si $y = x^2$, entonces $\dfrac{d^3x^2}{dx^3} = \dfrac{d^2}{dx^2}(2x) = \dfrac{d}{dx}(2) = 0 \Rightarrow D^3 = \dfrac{d^3}{dx^3}$ es el anulador de x^2.

…

- Si $y = x^n$, entonces $\dfrac{d^{n+1}x^n}{dx^{n+1}} = \dfrac{d^n}{dx^n}(nx^{n-1}) = \ldots = \dfrac{d}{dx}(n(n-1).....1) = 0$ ° $D^{n+1} = \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ es el anulador de x^n.
- Si $y = e^{ax}$, entonces $(D - a)e^{ax} = \left(\dfrac{d}{dx} - a\right)e^{ax} = \dfrac{d}{dx}e^{ax} - ae^{ax} = ae^{ax} - ae^{ax} = 0$ es el anulador de e^{ax}.
- Si $y = xe^{ax}$, entonces $(D - a)^2xe^{ax} = (D^2 - 2aD + a^2) = \left(\dfrac{d^2}{dx^2} - 2a\dfrac{d}{dx} + a^2\right)e^{ax} = \dfrac{d}{dx}ae^{ax} - 2a^2e^{ax} + a^2e^{ax}$ $= a^2eax - 2a^2e^{ax} + a^2e^{ax} = 0$ es el anulador de xe^{ax}.

…

- Si $y = x^ne^{ax}$, entonces $(D - a)^{n+1}x^ne^{ax} = 0$ es el anulador de $x^{n+1}e^{ax}$.

Por otra parte, $D^2 + \beta^2$ es el anulador de $\cos \beta x$, $\operatorname{sen} \beta x$ o de la combinación lineal de $C_1\cos \beta x + C_2\operatorname{sen} \beta x$.

$$(D^2+\beta^2)\cos \beta x = \frac{d^2}{dx^2}\beta x + \beta^2\cos \beta x = -\beta^2 \cos \beta x + \beta^2\cos \beta x = 0$$

$$(D^2+\beta^2)\operatorname{sen} \beta x = \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen} \beta x + \beta^2\operatorname{sen} \beta x = -\beta^2 \operatorname{sen} \beta x + \beta^2\operatorname{sen} \beta x = 0$$

$$(D^2+\beta^2)(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x) = \frac{d^2}{dx^2}(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x) + \beta^2(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x) = -\beta^2 C_1\cos\beta x - \beta^2 C_2\operatorname{sen}\beta x$$
$$+ \beta^2 C_1\cos \beta x + \beta^2 C_2\operatorname{sen} \beta x = 0$$

Problema resuelto

Determinar el anulador de $e^x + 2^x e^x - x^2 e^x$.

Solución

El operador anulador de esta ecuación es el que hace cero a todos los términos de la expresión:

$$(D-1)e^x = \frac{de^x}{dx} - e^x = 0$$

$$(D-1)^2 2xe^x = 2(D^2 - 2D + 1)xe^x = 2\left(\frac{d^2}{dx^2}xe^x - 2\frac{d}{dx}xe^x + xe^x\right) = 2(2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + xe^x)$$

$$= 2(\cancel{2e^x} \cancel{+xe^x} \cancel{-2e^x} - \cancel{2xe^x} + \cancel{xe^x}) = 0$$

$$(D-1)^3 x^2e^x = (D^3 - 3D^2 + 3D + 1)x^2e^x = \frac{d^3}{dx^3}x^2e^x - 3\frac{d^2}{dx^2}x^2e^x + 3\frac{d}{dx}x^2e^x + x^2e^x =$$

$$= \cancel{6e^x} + \cancel{x^2e^x} + \cancel{6xe^x} - 3(\cancel{2e^x} + \cancel{x^2e^x} + \cancel{4xe^x}) + 3(\cancel{x^2e^x} + \cancel{2xe^x}) + \cancel{x^2e^x} = 0$$

El anulador en este caso es: $(D-1)^3$.

Método de coeficientes indeterminados

Este constituye un método para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal de orden:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

El método en cuestión consiste fundamentalmente en intuir la forma de una solución particular. Se aplica cuando la función $f(t)$ es una combinación lineal de productos (finitos) de funciones tales que derivadas den el mismo tipo de función. Estas son:

- Polinomios en t
- Función exponencial e^{ht}
- Combinaciones lineales de $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$.

Para resolverla, se usa una función de prueba, la cual es una combinación lineal del mismo tipo de funciones, y cuyos coeficientes se determinan reemplazándola en la ecuación diferencial.

El caso más general es:

$$f(t) = e^{ht}[p(t)\cos(\omega t) + q(t)\operatorname{sen}(\omega t)]$$

Donde $h, \omega \uparrow 0$ y $p(t)$, $q(t)$ polinomios de grado n.

La función de prueba general es:

$$y^*(t) = e^{ht}((k_1 + k_2 t + \ldots k_{n+1}t^n)\cos(\omega t) + (l_1 + l_2 t + \ldots l_{n+1}t^n)\operatorname{sen}(\omega t))$$

En la que k y l son los coeficientes a determinar.

Si $h + i\omega$ es raíz de la homogénea asociada (lo que ocurre cuando esta función de prueba es solución del problema homogéneo), $y^*(t)$ debe multiplicarse por t.

Problema resuelto

Determinar la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + 3y = 6x + 1$$

Solución

Primero, resolvemos la homogénea:

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

La ecuación característica es:

$$m^2 + 2m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow m = \begin{cases} \dfrac{-2+2i\sqrt{2}}{2} = -1 + i\sqrt{2} \\ \dfrac{-2-2i\sqrt{2}}{2} = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

Entonces, la solución de la homogénea es:

$$y_h = Ae^{-x}\cos\sqrt{2}x + Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x$$

Aquí, es preciso observar que al aplicar $D^2 + 2D + 3$ a cualquier polinomio de primer grado se obtiene otro polinomio de primer grado. Entonces, se propone como solución particular un polinomio de primer grado, esto es:

$$y_p = Ax + B$$

$$(D^2 + 2D + 3)(Ax + B) = \frac{d^2}{dx^2}(Ax + B) + 2\frac{d}{dx^2}(Ax + B) + 3(Ax + B) = 2A + 3B + 3Ax = 6x + 1$$

$$\Rightarrow 3Ax = 6x \Rightarrow A = 2$$

$$2A + 3B = 1 \Rightarrow 2(2) + 3B = 1 \Rightarrow B = -1$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x}\cos\sqrt{2x} + Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2x} + 2x - 1$$

Comprobación de la solución

Derivamos y respecto de x:

$$y' = -Ae^{-x}\cos\sqrt{2}x - A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x - Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x + 2$$

$$y'' = Ae^{-x}\cos\sqrt{2}\,x + A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x - 2Ae^{-x}\cos\sqrt{2}\,x$$

$$+Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x - B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x - B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x - 2Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x$$

$$= -Ae^{-x}\cos\sqrt{2}\,x + 2A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x - Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x - 2B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x$$

$$y'' + 2y' + 3y = 6x + 1$$

$$\cancel{-Ae^{-x}\cos\sqrt{2}\,x} + \cancel{2A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x} - \overline{Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x} - \cancel{2B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x}$$

$$+2\left(\cancel{-Ae^{-x}\cos\sqrt{2}x} - \cancel{A\sqrt{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x} - \overline{Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x} + \cancel{B\sqrt{2}e^{-x}\cos\sqrt{2}x} + 2\right)$$

$$+3\left(\cancel{Ae^{-x}\cos\sqrt{2}x} + \overline{Be^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x} + 2x - 1\right) = 6x + 1$$

$$4 + 6x - 3 = 6x + 1$$

Problema resuelto

Determinar la solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' = 4x + 8$$

Solución

Primero, resolvemos la homogénea:

$$y'' + 5y' = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 5r = 0 \Rightarrow r_1 = -5 \text{ y } r_2 = 0$$

Entonces, la solución de la homogénea es:

$$y_h = c_1e^{-5x} + c_2$$

Ahora, determinamos la solución particular. Al no existir término en y en el primer miembro de la ecuación, cuando se aplica el operador L a un polinomio $P(x)$ de grado m se obtiene otro polinomio de grado $m - 1$; por tanto, para obtener un polinomio de primer grado, habrá que probar con un polinomio de segundo grado, con cualquier término independiente, por ejemplo 0.

Así, se propone como solución particular $y_p = Ax^2 + Bx$ y como operador anulador $D^2 + 5D$:

$$D(Ax^2 + Bx) = 2Ax + B$$
$$D^2(Ax^2 + Bx) = 2A$$
$$\Rightarrow D^2(Ax^2 + Bx) + 5D(Ax^2 + Bx) = 2A + 5(2Ax + B) = 2A + 5B + 10Ax$$
$$\Rightarrow 2A + 5B + 10Ax = 4x + 8$$

De la última ecuación nos quedan las ecuaciones:

$$10A = 4$$
$$2A + 5B = 8$$

Resolviendo el sistema:

$$A = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2\left(\frac{2}{5}\right) + 5B = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{5} - \frac{4}{25} = \frac{36}{25}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$y_p = \frac{2}{5}x^2 + \frac{36}{25}x$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-5x} + c_2 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{36}{25}x$$

Comprobación de la solución

Primero, derivamos a y respecto de x:

$$y' = -5c_1e^{-5x} + \frac{4}{5}x + \frac{36}{25}$$

$$y'' = 25c_1e^{-5x} + \frac{4}{5}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos:

$$25c_1e^{-5x} + \frac{4}{5} + 5\left(-5c_1e^{-5x} + \frac{4}{5}x + \frac{36}{25}\right) = 4x + 8$$

$$\cancel{25c_1e^{-5x}} + \frac{4}{5} - \cancel{25c_1e^{-5x}} + 4x + \frac{36}{5} = 4x + \frac{40}{5} = 4x + 8$$

3.8 Solución de ecuaciones diferenciales usando wxMaxima 11.04.0

Además de los métodos descritos antes, también existe un software diseñado para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, que recibe el nombre de wxMaxima 11.04.0. A continuación, veremos cómo se utiliza este software.

Como ejemplo, resolveremos la ecuación diferencial $y'' + 2y + 4y = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$.

En este caso, el primer paso, una vez que estamos utilizando wxMaxima 11.04.0, es limpiar procesos e introducir al software nuestra ecuación diferencial:

```
(%i35)  kill(x,y)$
        depends(y,x)$
        'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x)+4*y=0;

(%i36)
  (%i37)
```

$$(\%o37)\ \frac{d^2}{dx^2}y+2\left(\frac{d}{dx}y\right)+4\ y=0$$

El siguiente paso es introducir el comando `ode2(%, y, x)`. Para dar solución a la ecuación diferencial, la salida es:

```
(%i38)  ode2(%, y, x);
```

$$(\%o38)\quad y=\%e{-}x(\%k1\ \sin(\sqrt{3}x)+\%k2\ \cos(\sqrt{3}x))$$

Ahora, calculamos las constantes con wxMaxima, introduciendo las condiciones iniciales con el comando `ic2(%, x=0, y=1, 'diff(y,x)=1)`. De esta forma, la solución al problema de valores iniciales en wxMaxima es:

```
(%i39)  ic2(%, x=0, y=1, 'diff(y,x)=1);
```

$$(\%o39)\quad y=\%e^{-x}\left(\frac{2\ \sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}+\cos(\sqrt{3}x)\right)$$

3.9 Solución de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

A continuación se presenta con detalle el método para la solución de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Como ejemplo, utilizamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sea,

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$AX = X'$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, están dadas por el vector:

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t}$$

Entonces:

$$X' = K\lambda e^{\lambda t} \Rightarrow K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$$

Ahora, dividiendo entre $e^{\lambda t}$ obtenemos:

$$AK = \lambda K \Rightarrow (A - \lambda I)K = 0$$

Para que se tengan soluciones distintas de la trivial ($K = 0$), se debe cumplir que:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Así pues, al desarrollar el determinante se obtiene una ecuación polinomial en λ, la cual recibe el nombre de ecuación característica de la matriz A; sus soluciones son los eigenvalores de A. Una solución con $K \neq 0$, que corresponde a un eigenvalor λ, se conoce como eigenvector de A; entonces, una solución del sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales es:

$$X = Ke^{\lambda t}$$

En la ecuación característica, se pueden presentar tres casos:

Caso 1: Eigenvalores reales y diferentes.

Caso 2: Eigenvalores reales y repetidos.

Caso 3: Eigenvalores complejos.

Enseguida se estudia con detalle cado uno de los casos anteriores.

Caso 1. Eigenvalores reales y diferentes

Cuando la matriz A $n \times n$ tiene n eigenvalores reales y diferentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, siempre es posible determinar un conjunto de n eigenvectores linealmente independientes K_1, K_2, ...K_n. Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$X_1 = K_1e^{\lambda_1 t}, X_2 = K_2e^{\lambda_2 t}, \ldots, X_n = K_ne^{\lambda_n t}$$

Y la solución general del sistema es:

$$X = C_1K_1e^{\lambda_1 t} + C_2K_2e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_nK_ne^{\lambda_n t}$$

Problema resuelto

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 4y$$

Solución

Como primer paso, obtenemos los eigenvalores:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$$

Luego, obtenemos los eigenvectores:

Para $\lambda_1 = -2$, $(A + 2I)K = 0$:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 5k_1 - 5k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 2k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 = k_2$$

Después, hacemos: $k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$.

Entonces:

Para $\lambda_1 = -2,\ K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1$, $(A - 1)K = 0$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2k_1 - 5k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 5k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_2 = \frac{2}{5}k_1$$

Ahora, hacemos $k_1 = 1$.

Entonces:

Para $\lambda_2 = 1,\ K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Por consiguiente, la solución general del sistema es:

$$X = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}e^{t} = \begin{pmatrix}C_1e^{-2t} + C_2e^{t}\\ C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t}\end{pmatrix}$$

Esto es:

$$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$$

$$y = C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t}$$

Comprobación de la solución

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1e^{-2t} + C_2e^{t} = 3x - 5y = 3(C_1e^{-2t} + C_2e^{t}) - 5\left(C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t}\right) = -2C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t} = 2x - 4y = 2(C_1e^{-2t} + C_2e^{t}) - 4\left(C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t}\right) = -2C_1e^{-2t} + \frac{2}{5}C_2e^{t}$$

Caso 2. Eigenvalores reales y repetidos

Cuando la matriz A $n \times n$ tiene n eigenvalores reales y repetidos, un factor de la ecuación característica es $(\lambda - \lambda_1)^m$, entonces se dice que λ_1 es un eigenvalor de multiplicidad m.

En este caso se pueden presentar las siguientes situaciones:

a) Si es posible determinar m eigenvectores, la solución general del sistema es la combinación lineal:

$$C_1K_1e^{\lambda_1 t} + C_2K_2e^{\lambda_1 t} + \dots + C_mK_me^{\lambda_1 t}$$

b) Si solo existe un eigenvector que corresponde al eigenvalor λ_1, de multiplicidad m, es posible determinar m soluciones linealmente independientes de la forma:

$$X_1 = Ke^{\lambda_1 t}$$

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$$

$$\vdots$$

$$X_m = K\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + P\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + Q\frac{t^{m-3}}{(t-3)!}e^{\lambda_1 t} + \dots$$

Donde:

$$(A - \lambda_1 I)K = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

$$(A - \lambda_1 I)Q = P$$

$$\vdots$$

Entonces, la solución general es:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots$$

Problema resuelto

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 6y$$

Solución

Primero, obtenemos los eigenvalores:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda)+4=0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda-4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

En este caso, λ_1 es un eigenvalor de multiplicidad 2.

Luego, obtenemos el eigenvector:

Para $\lambda_1 = 4$, $(A-4I)K=0$:

$$A-4I = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -2k_1 - 4k_2 &= 0 \\ k_1 + 2k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 = -2k_2$$

Ahora, hacemos $k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = -2$.

Entonces, para $\lambda_1 = 4$, $K = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ una solución es:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

Así pues, solo existe un eigenvector. Ahora, calculemos el otro eigenvector a través de la relación:

$$(A-4I)P = K$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2p_1 - 4p_2 \\ p_1 + 2p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $p_2 = 1$:

$$p_1 + 2p_2 = 1 \Rightarrow p_1 = -1$$

Entonces $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Una segunda solución es:

$$X_2 = Kte^{4t} + Pe^{4t}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} -2te^{4t} - e^{4t} \\ te^{4t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general es:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -2te^{4t} - e^{4t} \\ te^{4t} + e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1e^{4t} + C_2(-2te^{4t} - e^{4t}) \\ C_1e^{4t} + C_2(te^{4t} + e^{4t}) \end{pmatrix}$$

Comprobación de la solución

$$\frac{dx}{dt} = -8C_1e^{4t} - 8C_2te^{4t} - 6C_2e^{4t}$$

$$2x - 4y = 2(-2C_1e^{4t} + C_2(-2te^{4t} - e^{4t})) - 4(C_1e^{4t} + C_2(te^{4t} + e^{4t})) = -8C_1e^{4t} - 8C_2te^{4t} - 6C_2e^{4t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4C_1e^{4t} + 5C_2e^{4t} + 4C_2te^{4t}$$

$$x + 6y = -2C_1e^{4t} + C_2(-2te^{4t} - e^{4t}) + 6(C_1e^{4t} + C_2(te^{4t} + e^{4t})) = 4C_1e^{4t} + 4C_2te^{4t} + 5C_2e^{4t}$$

Caso 3. Eigenvalores complejos

Cuando la matriz A $n \times n$ tiene eigenvalores complejos y K es un eigenvector correspondiente al eigenvalor complejo $\lambda = \alpha + i\beta$, donde α y β son reales, entonces las soluciones correspondientes son:

$$Ke^{\lambda t} \text{ y } \overline{K}e^{\overline{\lambda}t}$$
$$Ke^{\lambda t} = Ke^{(\alpha + i\beta)t} = Ke^{\alpha t}e^{i\beta t} = Ke^{\alpha t}(\cos \beta t + i\operatorname{sen} \beta t)$$
$$\overline{K}e^{\overline{\lambda}t} = \overline{K}e^{(\alpha - i\beta)t} = \overline{K}e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = Ke^{\alpha t}(\cos \beta t - i\operatorname{sen} \beta t)$$

Para cualquier número complejo $z = a + ib$, $A = \frac{z + \overline{z}}{2}$ y $B = \frac{i}{2}(-z + \overline{z})$ son números reales. Entonces, se definen las matrices:

$$B_1 = \frac{K + \overline{K}}{2} \text{ y } B_2 = \frac{i}{2}(-K + \overline{K})$$

Por consiguiente, las soluciones son:

$$X_1 = (B_1\cos \beta t - B_2\operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t}$$
$$X_2 = (B_2\cos \beta t + B_1\operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t}$$

Así, la solución general es:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2$$

Problema resuelto

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - y$$

Solución

Primero, obtenemos los eigenvalores:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) + 10 = 0 \Rightarrow -1 + \lambda^2 + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$$

En este caso, $\alpha = 0$ y $\beta = 3$.

Luego, obtenemos el eigenvector:

Para, $\lambda_1 = 3i$, $(A - 3iI)K = 0$:

$$A - 3iI = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix}K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ 5 & -1-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - 3i)k_1 - 2k_2 = 0$$

$$5k_1 - (1 + 3i)k_2 = 0$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$k_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)k_1$$

Hacemos $k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

Entonces, los eigenvectores son:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos las $B_1 = \frac{K + \bar{K}}{2}$ y $B_2 = \frac{i}{2}(-K + \bar{K})$

$$B_1 = \frac{K + \bar{K}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \frac{i}{2}(-K + \bar{K}) = i\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las soluciones correspondientes son:

$$X_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\operatorname{sen}3t\right) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{3}{2}\operatorname{sen}3t \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\cos 3t + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\operatorname{sen}3t\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}3t \\ -\frac{3}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}3t \end{pmatrix}$$

Así, la solución general es:

$$X_s = C_1 K e^{\lambda t} + C_2 \overline{K} e^{\bar{\lambda} t}$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{3}{2}\text{sen}3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \text{sen}3t \\ -\frac{3}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\text{sen}3t \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$x = C_1 \cos 3t + C_2 \text{sen } 3t$$

$$y = \frac{1}{2}((C_1 - 3C_2)\ \cos\ 3t + (3C_1 + C_2)\ \text{sen}\ 3t)$$

Comprobación de la solución

$$\frac{dx}{dt} = -3C_1 \text{sen } 3t + 3C_2 \cos 3t$$

$$x - 2y = C_1 \cos 3t + C_2 \text{sen}3t - ((C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + C_2)\text{sen}3t) = -3C_1 \text{sen } 3t + 3C_2 \cos 3t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9}{2}C_1 \cos 3t + \frac{3}{2}C_2 \cos 3t - \frac{3}{2}C_1 \text{sen}3t + \frac{9}{2}C_2 \text{sen}3t$$

$$5x - y = 5(C_1 \cos 3t + C_2 \text{sen}3t) - \frac{1}{2}((C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + C_2)\text{sen}3t)$$

$$= \frac{9}{2}C_1 \cos 3t + \frac{3}{2}C_2 \cos 3t - \frac{3}{2}C_1 \text{sen}3t + \frac{9}{2}C_2 \text{sen}3t$$

3.10 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Existe una gran variedad de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales; a continuación se explican algunos de los más comunes.

Modelo depredador-presa

Supongamos que dos especies animales interactúan en un mismo ecosistema, donde la primera solo come plantas y la segunda se alimenta de la primera. En otras palabras, una especie es depredadora y la otra es la presa.

Entonces, sean $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de depredadores y presas en cualquier momento, t. Si no hubiera presas, se podría esperar que los depredadores disminuyeran de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad a > 0$$

al carecer del suministro alimenticio adecuado.

Por otro lado, cuando hay presas en un ecosistema es lógico imaginar que la cantidad de interacciones por unidad de tiempo entre ambas especies es simultáneamente proporcional a sus poblaciones x y y; en otras palabras, es proporcional al producto xy. Así, cuando hay presas, hay alimento para los depredadores, los cuales aumentan en cantidad en el ecosistema a una tasa $bxy > 0$. Así, al sumar esta tasa a la ecuación anterior se obtiene un modelo demográfico para estos depredadores:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy$$

Por otro lado, cuando no existen depredadores y las reservas de alimento son ilimitadas, las presas aumentan con una rapidez proporcional al número de especímenes existentes en el momento t. Así:

$$\frac{dy}{dt} = dy, \quad d > 0$$

Pero, cuando hay depredadores, el modelo demográfico para las presas es la ecuación anterior menos cxy, $c > 0$; esto es, disminuyen según qué tan rápido son devorados:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy$$

Por tanto, las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = -ax + bxy$ y $\frac{dy}{dt} = dy - cxy$ forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy = x(a + by)$$

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy = y(d - cx)$$

Donde a, b, c y d son constantes positivas. Este es un famoso sistema de ecuaciones que recibe el nombre de modelo depredador-presa de **Lotka-Volterra**.

A excepción de las dos soluciones constantes $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $x(t) = d/c$, $y(t) = a/b$, este sistema no lineal no se puede resolver en términos de funciones elementales; sin embargo, sí es posible analizar estos sistemas con software en forma cuantitativa y cualitativa.

Ahora, además de las dos especies referidas antes, consideremos que también existen dos especies animales distintas que ocupan el mismo ecosistema, no como depredador y presa, sino como competidores en el uso de los mismos recursos, como alimentos y espacio vital. Cuando falta una especie, supongamos que la razón de crecimiento demográfico de cada especie es $\frac{dx}{dt} = ax$ y $\frac{dy}{dt} = cy$ respectivamente.

En vista de que las dos especies compiten, otra hipótesis podría ser que cada una se ve menguada por la influencia (o existencia) de la otra población. Así, un modelo de las dos poblaciones es el sistema lineal es:

$$\frac{dx}{dt} = ax - by$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dx$$

Donde a, b, c y d son constantes positivas.

Modelos de competencia

Por otra parte, podríamos suponer que cada rapidez de crecimiento en las ecuaciones debe disminuir a una tasa proporcional a la cantidad de interacciones entre las dos especies:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy$$

Por inspección, es posible observar que este sistema no lineal se parece al modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Por tanto, sería más real reemplazar las tasas que indican que la población de cada especie aislada crece en forma exponencial con tasas que reflejen que cada población crece en forma logística (esto es, que la población permanece acotada):

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2$$

Pero, si a esas nuevas tasas se les restan razones proporcionales a la cantidad de interacciones, llegamos a otro modelo no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x)$$

en que todos los coeficientes son positivos. Entonces, al sistema lineal y a los sistemas no lineales se les conoce como **modelos de competencia**.

Problema resuelto

Se tiene un modelo depredador-presa de Lotka-Volterra definido por:

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy$$

Donde las poblaciones $x(t)$ del depredador y $y(t)$ de la presa se expresan en miles. Con un programa de software, calcular, aproximadamente, el momento $t > 0$ cuando se igualan por primera vez las poblaciones, suponiendo $x(0) = 6$, $y(0) = 6$. Se pide usar las gráficas para hallar el periodo aproximado de cada población.

Solución

Para resolver el sistema de ecuaciones, utilizamos el software *Two Dimensional Differential Equation Solver and Grapher V 1.0*, que se encuentra disponible en la siguiente dirección de Internet, desde donde es posible descargarlo: http://www.zweigmedia.com/RealWorld/deSystemGrapher/func.html

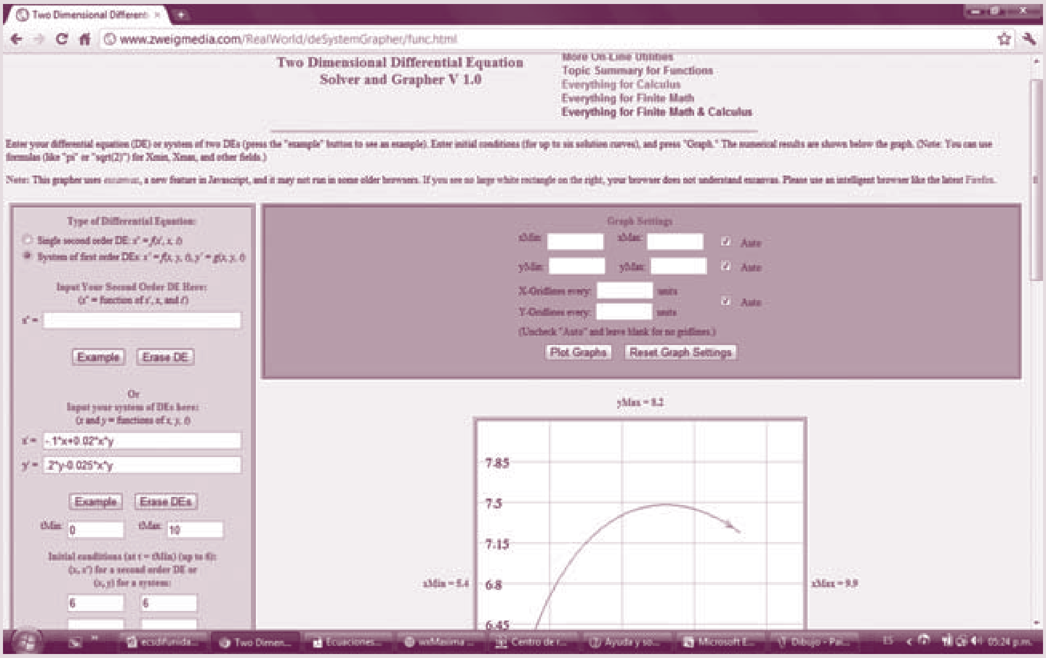
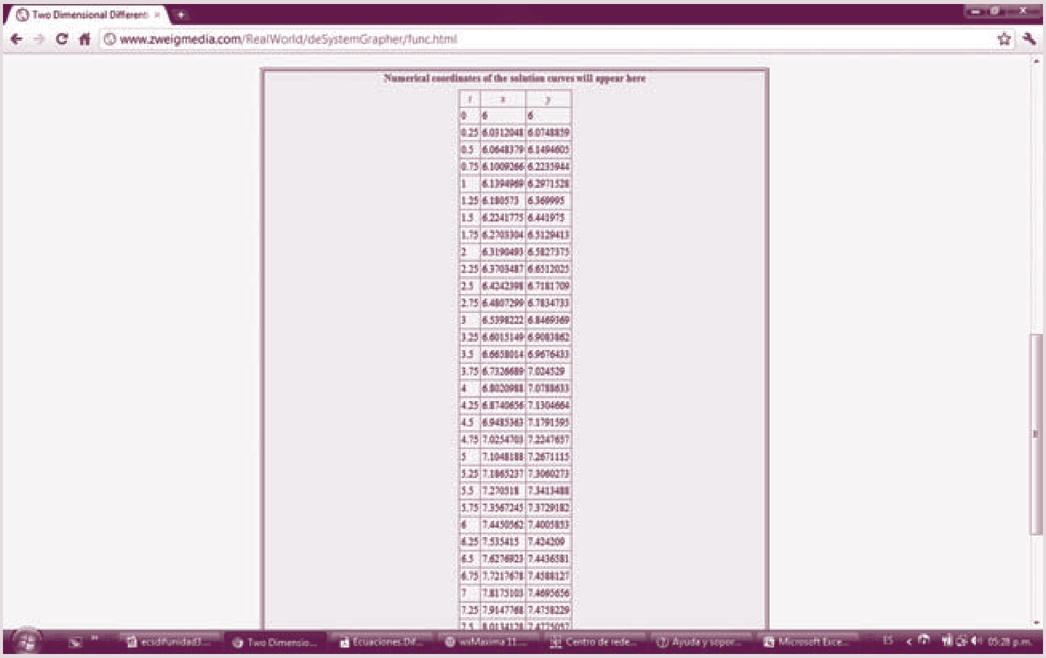


Figura 3.4

Una vez que tenemos acceso al software *Two Dimensional Differential Equation Solver and Grapher V 1.0,* escribimos las ecuaciones diferenciales, como se muestra en la figura 3.4. La página despliega la tabla que se muestra a continuación:



Numerical coordinates of the solution curves will appear here

t	x	y
0	6	6
0.25	6.0312048	6.0748839
0.5	6.0648379	6.1494605
0.75	6.1009266	6.2235944
1	6.1394969	6.2971528
1.25	6.180573	6.369995
1.5	6.2241775	6.441975
1.75	6.2703304	6.5129413
2	6.3190493	6.5827375
2.25	6.3703487	6.6512025
2.5	6.4242398	6.7181709
2.75	6.4807299	6.7834733
3	6.5398222	6.8469369
3.25	6.6015149	6.9083862
3.5	6.6658014	6.9676433
3.75	6.7326689	7.024529
4	6.8020988	7.0788633
4.25	6.8740656	7.1304664
4.5	6.9485363	7.1791595
4.75	7.0254703	7.2247657
5	7.1048188	7.2671115
5.25	7.1865237	7.3060273
5.5	7.270518	7.3413488
5.75	7.3567245	7.3729182
6	7.4450562	7.4005853
6.25	7.535415	7.424209
6.5	7.6276923	7.4436581
6.75	7.7217678	7.4588127
7	7.8175103	7.4695656
7.25	7.9147768	7.4758229
7.5	8.0134128	7.4775057

Figura 3.5

Luego, graficamos los valores, como se ve en la figura 3.6:

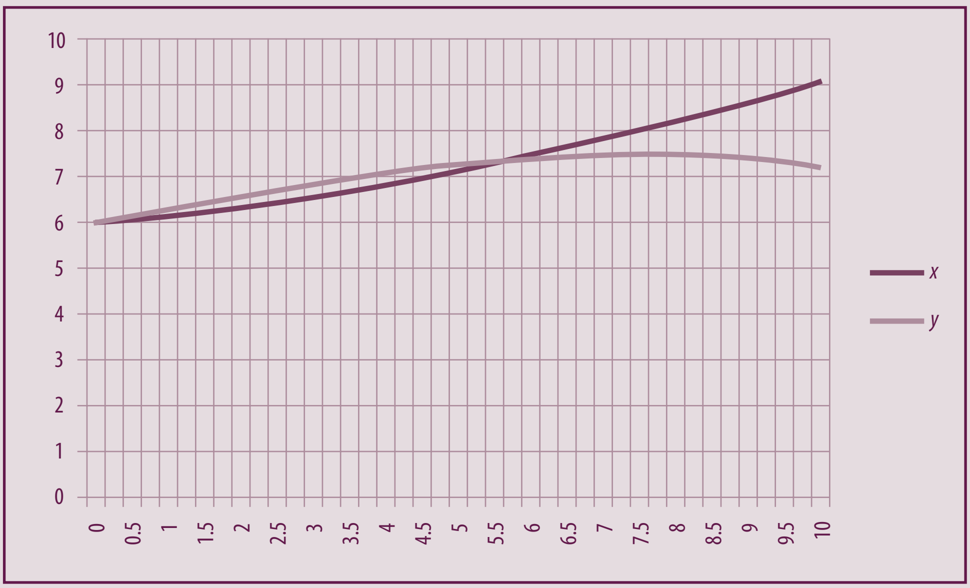


Figura 3.6

En la gráfica de la figura 3.6 podemos observar que entre $t = 5.75$ y $t = 6$ las poblaciones se igualan, en 7 400.

Ahora, repitiendo la gráfica hasta $t = 100$, obtenemos las curvas que se muestran a continuación:

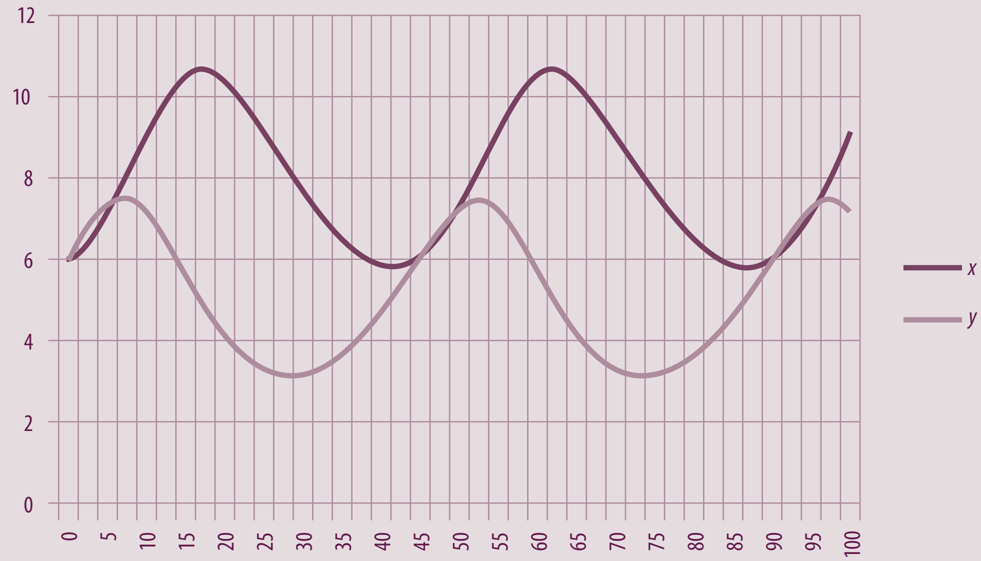


Figura 3.7

Como estamos manejando poblaciones, entonces: $x(t) > 0$, $y(t)$ 2 0.

Como se puede observar en la figura 3.7, las curvas características de las demografías de depredadores y de presas para este modelo se hallan sobrepuestas en los mismos ejes coordenados. Las condiciones iniciales empleadas fueron $x(0) = 6$, $y(0) = 6$.

El modelo parece predecir que ambas poblaciones, $x(t)$ y $y(t)$, son periódicas. Esto tiene sentido intuitivamente, porque cuando disminuye la cantidad de presas, la cantidad de depredadores terminará reduciéndose por un menor suministro de alimento; pero, a causa de una disminución en la cantidad de depredadores, la cantidad de presas aumenta, lo que, a su vez, origina un mayor número de depredadores, provocando otra disminución en la cantidad de presas. De la figura 3.7 también se puede observar que el **periodo aproximado** para ambas especies es de 45 años.

3.11 Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando el CAS wxMaxima 11.04.0

Los sistemas se ecuaciones diferenciales también pueden ser resueltos con el software CAS wxMaxima 11.04.0, como se puede observar en los siguientes problemas resueltos.

Problema resuelto

Usando el CAS wxMaxima11.04.0 resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = 3x + 2y$$
$$y'(t) = 5x - 4y$$

Solución

Para resolver este sistema usando el CAS, se teclea el siguiente comando:

```
-->     desolve(['diff(x(t),t)=3*x(t)+2*y(t),'diff(y(t),t)=5*x(t)-4*y(t)1,
[x(t),y(t)]);
```

$$\text{(\%o10)}\quad [x(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{(2(2\ y(0)+4x(0))-x(0))\sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+x(0)\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right)$$

$$y(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{(2(5\ x(0)-3y(0))-y(0))\sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+y(0)\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right)$$

Problema resuelto

Usando el CAS wxMaxima 11.04.0 resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= 3x + 2y \\ y'(t) &= 5x - 4y \end{aligned}\right\} \text{con } x(0) = 5, \quad y(0) = 10$$

Solución

Cuando se quieren añadir condiciones iniciales en el origen, estas deben escribirse antes de resolver el sistema.

Así que primero debemos indicar los valores iniciales de x y y con el comando `atvalue`:

```
(%i1)   atvalue(x(t),t=0,1);
        atvalue(y(t),t=0,1);

(%o1)   1
  (%o2)   1
```

Después, resolvemos el sistema:

```
(%i4)  desolve(['diff(x(t),t)=3*x(t)+2*y(t),'diff(y(t),t)=5*x(t)-4*y(t)1,
        [x(t),y(t)]);
```

$$\text{(\%o4)}\quad [x(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{11\ \sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right),$$

$$y(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{3\ \sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right)]$$

Posteriormente, graficamos ambas curvas; para lo cual, primero se definen:

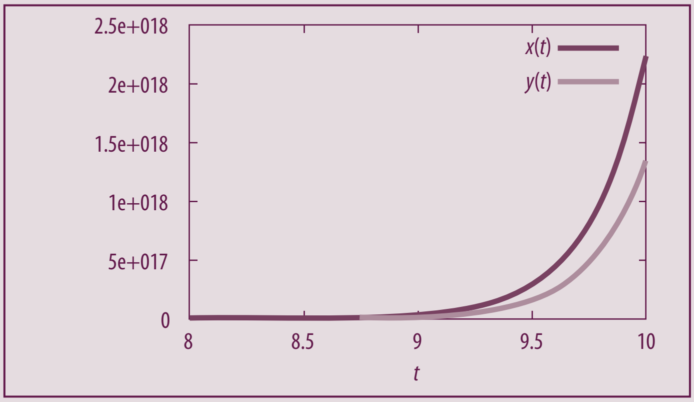
```
(%i5)  define(xo(t),%e^(-t/2)*((11*sinh((sqrt(89)*t)/2))/sqrt(89)+cosh((sqrt(89)*t)/2)));
       define(yo(t),%e^(-t/2)*((3*sinh((sqrt(89)*t)/2))/sqrt(89)+cosh((sqrt(89)*t)/2)));
```

(%o5) $\mathrm{xo(t)} := e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{11\sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right)$

(%o6) $\mathrm{yo(t)} := e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{3\sinh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)}{\sqrt{89}}+\cosh\left(\frac{\sqrt{89}\,t}{2}\right)\right)$

```
(%i8)  wxplot2d([xo(t),yo(t)],[t,8,10],[style, [lines,2,2], [lines,1,1]],
       [legend,"x(t)","y(t)"],[xlabel,"t"], [ylabel,"x,y"]);
```

(%tE)



(%o8)

Figura 3.8

3.12 Ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones de primer orden

Dada la ecuación $xy'' = y'$

Sea:

$$z = y'$$
$$z' = y''$$

Entonces, haciendo el cambio de variable, la ecuación se reduce:

$$xz' = z$$

$$x\frac{dz}{dx} = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \ln x + \ln c_1$$

$$z = c_1x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1x \Rightarrow dy = c_1xdx$$

$$\int dy = \int c_1x\,dx$$

$$y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$$

Problema resuelto

Determinar la solución general de orden superior:

$$y''' - 4y'' - 5y' = 0$$

Solución

En este caso, primero se realiza el cambio de variable:

$$z = y'$$
$$z' = y''$$
$$z'' = y'''$$

$$z'' - 4z' - 5z = 0$$

Luego, se resuelve la ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_1 - 5, \lambda_2 = -1$$

$$z = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$$

Por último, se encuentra a y:

$$z = \frac{dy}{dx} = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \Rightarrow y = \int (c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}) dx = \frac{c_1}{5} e^{5x} - c_2 e^{-x} + c_3$$

Problema resuelto

Determinar la solución general de orden superior:

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$$

Solución

La ecuación característica es $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$.

Entonces, hacemos el cambio $\lambda = t + \frac{5}{3}$

$$\left(t + \frac{5}{3}\right)^3 - 5\left(t + \frac{5}{3}\right)^2 + 3\left(t + \frac{5}{3}\right) + 9 = 0$$

$$t^3 - \frac{16}{3} t + \frac{128}{27} = 0$$

$$t^3 + pt - q = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

$$p = -\frac{16}{3},\ q = -\frac{128}{27} \Rightarrow \frac{p}{3} = -\frac{16}{9},\ \frac{q}{2} = -\frac{128}{54}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 = -\left(\frac{16}{9}\right)^3 = -\frac{4\,096}{729}$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{128}{54}\right)^2 = \frac{16\,384}{2916} = \frac{4096}{729} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{-\frac{128}{54}} - \sqrt[3]{\frac{128}{54}} = -2\sqrt[3]{\frac{128}{54}} = -2\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -2\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda = t + \frac{5}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = -1$$

$$\begin{array}{r l} & \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\ \lambda + 1 \,\big) & \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 \\ & \underline{-\lambda^3 - \lambda^2} \\ & -6\lambda^2 + 3\lambda \\ & \underline{6\lambda^2 + 6\lambda} \\ & 9\lambda + 9 \\ & \underline{-9\lambda - 9} \\ & 0 \end{array}$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2 = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son: es $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$.

Así, las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$$

Problema resuelto

Determinar la solución general de orden superior:

$$y^{(4)} + y''' + y'' = 0$$

Solución

Primero, hacemos el cambio de variable:

$$z = y''$$
$$z' = y'''$$
$$z'' = y^{(4)}$$

$$z'' + z' + z = 0$$

La ecuación característica de esta ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Así que su solución es:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \alpha \pm i\beta$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$z = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Pero:

$$z = \frac{dy'}{dx} = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$y' = c_1 \int \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\,dx + c_2 \int \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}dx + c_3$$

$$\int \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\int \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Entonces:

$$y' = c_1\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]$$

$$+c_2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\right] + c_3$$

$$y' = \left(-\frac{c_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + c_3$$

Integrando:

$$y = \left(-\frac{c_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\int \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}dx + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right)\int \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\,dx + c_3x + c_4$$

$$y = \left(-\frac{c_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\right) + c_3x + c_4$$

$$y = \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{c_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} +$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{c_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right)\right]\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}\right) + c_3x + c_4$$

$$y = A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + c_3x + c_4$$

Comprobación de la solución

Como esta solución debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$y^{(4)} + y''' + y'' = 0$$

Entonces, derivamos a y sucesivamente y encontramos:

$$y' = -\frac{1}{2}A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{3}A\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{3}B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + c_3$$

$$y'' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}A\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3}B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

$$y''' = A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y^{(4)} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sqrt{3}B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3}A\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Por último, sustituimos en la ecuación diferencial:

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cancel{A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} + \cancel{B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} - \sqrt{3}B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \cancel{\sqrt{3}A\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}\right)$$

$$+\cancel{A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}} + \cancel{B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}} +$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cancel{A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} - \cancel{\sqrt{3}A\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} + \cancel{B\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} + \sqrt{3}B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) = 0$$

3.13 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

En esta sección se presentan y desarrollan algunas de las aplicaciones más comunes de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Mecánica newtoniana

Problema resuelto

Un paracaidista cae junto con su paracaídas, partiendo desde el reposo, de una distancia y_0. El peso total es w en N. Sobre el sistema actúa una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad. Si la caída es vertical, determinar:

a) La ecuación de movimiento.

$$F = mg - kv$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} = g$$

b) La ecuación con los siguientes datos $w = 98$ N y $k = 10$ kg/s.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{10\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}}{10\ \text{kg}}\frac{dy}{dt} = 9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\text{s}}\frac{dy}{dt} = 9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) La distancia recorrida por el paracaidista al tiempo t.

Solución

Resolvemos la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\text{s}}\frac{dy}{dt} = 0$$

Proponemos como solución $y = e^{\lambda x}$, sustituyendo en la ecuación diferencial determinamos la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{1}{\text{s}}\lambda = 0$$

Resolvemos la ecuación característica:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\text{s}},\ \lambda_2 = 0$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h = c_1 e^{-\frac{t}{\text{s}}} + c_2$$

Ahora resolvemos la ecuación no homogénea, para eso calculamos el wronskiano:

$$y_1 = e^{-\frac{t}{\text{s}}},\ y_2 = 1$$

$$y'_1 = -\frac{1}{\text{s}}e^{-\frac{t}{\text{s}}},\ y'_2 = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{t}{\text{s}}} & 1 \\ -\frac{1}{\text{s}}e^{-\frac{t}{\text{s}}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\text{s}}e^{-\frac{t}{\text{s}}}$$

Puesto que el wronskiano es diferente de cero, calculamos a u y a v:

$$u = -\int \frac{y_2 h(t)}{W}dt = -\int \frac{98\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{1}{\text{s}}e^{-\frac{t}{\text{s}}}}dt = -9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\int_0^t e^{\frac{t}{\text{s}}}dt = (-9.8\ \text{m})e^{\frac{t}{\text{s}}} + 9.8\ \text{m}$$

$$v = \int \frac{y_1 h(t)}{W}dt = \int \frac{98\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}e^{-\frac{t}{\text{s}}}}{\frac{1}{\text{s}}e^{-\frac{t}{\text{s}}}}dt = 9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\int_0^t dt = 9.8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La distancia recorrida en un tiempo t es:

$$y - y_0 = u(t)y_1(t) + v(t)y_2(t) = -(9.8\ \text{m})e^{\frac{t}{\text{s}}}e^{-\frac{t}{\text{s}}} + 9.8\ \text{m}e^{-\frac{t}{\text{s}}} + 9.8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y - y_0 = -9.8\ \text{m} + 9.8\ \text{m}e^{-\frac{t}{\text{s}}} + 9.8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Problema resuelto

Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 20x = 0$$

A partir de un punto ubicado a 2 m a la derecha del origen, la partícula en el tiempo $t = 0$ segundos se dispara hacia la izquierda con una velocidad $v = 12$ m/s. Determinar:

a) El tiempo en que la partícula pasa por el origen.
b) El desplazamiento en $t = 5$ s.
c) La velocidad en $t = 5$ s.

Solución

La ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -5$$

Entonces, el desplazamiento está dado por:

$$x = c_1e^{-4t} + c_2e^{-5t}$$

Y la velocidad está dada por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -4c_1e^{-4t} + -5c_2e^{-5t}$$

Para $t = 0$, $x = 2$ m, esto es una condición inicial.

Para $t = 0$, $v = -12$ m/s, la siguiente es la segunda condición inicial:

$$2 = c_1 + c_2$$
$$-12 = -4c_1 - 5c_2 \Rightarrow c_1 = -2,\ c_2 = 4$$
$$x = -2e^{-4t} + 4e^{-5t}$$

Entonces:

a) $0 = -2e^{-4t} + 4e^{-5t} \Rightarrow 2e^{-4t} = 4e^{-5t} \Rightarrow \frac{2}{4} = e^{-t} \Rightarrow -t = \frac{1}{2} = -0.69315 \Rightarrow t = 0.69315$ s

b) $x = -2e^{-4(5)} + 4e^{-5(5)} = -4.0668 \times 10^{-9}$ m

c) $v = 8e^{-4(5)} - 20e^{-5(5)} = 1.6211 \times 10^{-8}$ m/s

Problema resuelto

Considérese un resorte en el que la fuerza, que es proporcional a su alargamiento, produce una fuerza de 4 N en un alargamiento de 50 cm. Un peso de 19.6 N colgado desde el resorte se empuja hacia abajo a partir de la posición de reposo que está a 1 m. Si se suelta el peso, estudiar y determinar el movimiento en los siguientes casos:

a) Cuando no hay resistencia del aire.
b) Si la resistencia del aire es 8 dx/dt.
c) Si además de la resistencia del aire hay una fuerza proporcional a la estructura del soporte $y = 10$ sen 2t.

Solución

Se tienen las ecuaciones:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{19.6}{9.81} = 2 \text{ kg}$$

$$Fr = kx \Rightarrow k(0.5 \text{ m}) = 4 \text{ N} \Rightarrow k = \frac{4 \text{ N}}{0.5 \text{ m}} = 8\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

a) Si no hay resistencia del aire, la ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{s^2}x = 0$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow x = c_1\cos 2t + c_2\text{sen } 2t$$

Así, las condiciones iniciales son:

$t = 0$ cuando $x = 1$

$t = 0$ cuando $x' = 0$, entonces $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$

$x = \cos 2t$

$A = 1$

$$\omega = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ seg}$$

b) Si la resistencia del aire es 8 dx/dt, la ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 8\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \Rightarrow x = e^{-2t}(c_1 + c_2t) \Rightarrow x = e^{-2t}(1 + 2t)$$

c) Si además de la resistencia del aire hay una fuerza proporcional a la estructura del soporte $y = 10$ sen $2t$, la ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -8\left(x - 10\text{ sen } 2t\right) - 8\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = -40\text{ sen } 2t$$

Su solución es:

$$x = e^{-2t}(6 + 12t) - 5\cos 2t$$

Péndulo simple

Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por un hilo inextensible de longitud l y de masa despreciable (véase figura 3.9).

Si la partícula se desplaza a una posición θ_0 (donde se forma el ángulo del hilo con la vertical) y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar.

El péndulo describe una trayectoria circular, formando un arco de una circunferencia de radio l. Aquí, estudiaremos su movimiento en la dirección tangencial y en la dirección normal.

Así, podemos decir que las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m son dos:

- Una fuerza vertical, el peso $m\vec{g}$.
- La acción del hilo, una fuerza $\vec{T}$ en la dirección radial.

En seguida, se descompone el peso en la acción simultánea de dos componentes, $mg\text{sen}\theta$ en la dirección tangencial y $mg\cos\theta$ en la dirección radial.

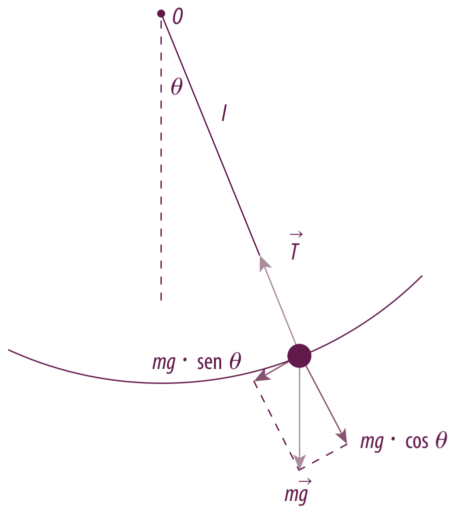


Figura 3.9

Ecuación del movimiento en la dirección radial

En este caso, la aceleración de la partícula es $a_r = \dfrac{v^2}{l}$ dirigida radialmente hacia el centro de su trayectoria circular.

Entonces, la segunda ley de Newton se escribe:

$$ma_r = T - mg\cos\theta \Rightarrow \frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\theta \Rightarrow T = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\theta$$

Conocido el valor de la velocidad v en la posición angular θ, podemos determinar la tensión T del hilo.

Principio de conservación de la energía

En la posición $\theta = \theta_0$, el péndulo solamente tiene energía potencial, la cual se transforma en energía cinética cuando el péndulo pasa por la posición de equilibrio.

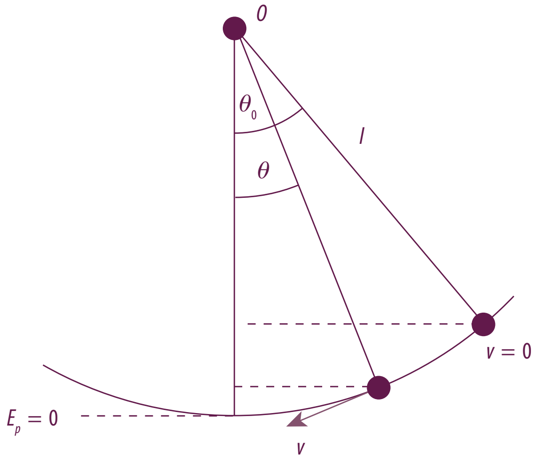


Figura 3.10

Ahora, comparemos dos posiciones del péndulo:

- En la posición extrema $\theta = \theta_0$, la energía es solamente potencial:

$$E_p = mg(l - l\cos\theta_0)$$

- En la posición θ, la energía del péndulo es en parte cinética y en parte potencial:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mg(l - l\cos\theta)$$

Entonces, la energía se conserva:

$$mg(l - l\cos\theta_0) = \frac{mv^2}{2} + mg(l - l\cos\theta)$$

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

La tensión de la cuerda es:

$$T = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\theta$$

$$T = \frac{m}{l}2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta$$

$$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$$

La tensión de la cuerda no es constante, sino que varía con la posición angular θ. Su valor máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando el péndulo pasa por la posición de equilibrio (la velocidad es máxima), y alcanza su valor mínimo cuando $\theta = \theta_0$, es decir, cuando la velocidad es nula.

Ecuación del movimiento en la dirección tangencial

La aceleración de la partícula es $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

Aquí es importante recordar que la componente tangencial de la aceleración describe únicamente los cambios en el módulo de la velocidad de la partícula, mientras que la aceleración normal da cuenta de los cambios en la dirección de la velocidad con el tiempo.

Entonces, la segunda ley de Newton se escribe:

$$ma_t = mg\,\text{sen}\,\theta$$

La relación entre la aceleración tangencial a_t y la aceleración angular α es $a_t = \alpha l$. La ecuación del movimiento se escribe en forma de ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Oscilaciones de pequeña amplitud

Cuando el ángulo θ es pequeño, entonces sen $\theta \approx \theta$; en este caso, el péndulo describe oscilaciones armónicas cuya ecuación es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Resolvamos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Entonces, la ecuación característica es:

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$$

Así, la solución es:

$$\theta = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Ahora, apliquemos la condición inicial $\theta(0) = \theta_0$:

$$\theta_0 = C_1 \cos 0 = C_1$$

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Y la condición inicial $\theta'(0) = 0$:

$$\theta'(t) = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\theta'(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

En seguida, definimos la frecuencia $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Entonces:

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t$$

$$\text{sen}(\omega t + \phi) = \text{sen}\ \omega t \cos \phi + \cos \omega t\ \text{sen}\ \phi$$

Si $\phi = \frac{n\pi}{2}$ con $n = 1, 5, 9, \ldots$

$$\text{sen}(\omega t + \phi) = \cos \omega t$$

Entonces, la solución es: $\theta = \theta_0\ \text{sen}(\omega t + \phi)$.

Y el periodo es:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Movimiento amortiguado

Se dice que se tiene un movimiento amortiguado cuando hay una fuerza resistiva dependiente de la velocidad; la ecuación de movimiento está dada por:

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v \Rightarrow \frac{d^2x}{dt} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Entonces, hacemos:

$$2n = \frac{b}{m},\ p^2 = \frac{k}{m}$$

Por tanto, la ecuación auxiliar es:

$$m^2 + 2nm + p^2 = 0$$

- Si $n^2 > p^2$, se dice que se tiene un **movimiento sobreamortiguado** y la solución de la ecuación de movimiento está dada por: $x(t) = C_1e^{\lambda 1t} + C_2e^{\lambda 2t}$.
- Si $n^2 = p^2$, se dice que se tiene un **movimiento críticamente amortiguado** y la solución de la ecuación de movimiento está dada por: $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}$.
- Si $n^2 < p^2$, se dice que se tiene un **movimiento subamortiguado** y la solución de la ecuación de movimiento está dada por: $x(t) = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{p^2 - n^2}\,t + C_2\text{sen}\sqrt{p^2 - n^2}\,t)$

Problemas para resolver

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden de los problemas 3.1 a 3.10:

3.1 $y'' - \frac{5}{2} + y = 0$

3.2 $y'' \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y = 0$

3.3 $y'' + 2y' + 3y = 0$

3.4 $y'' - 2y' - 3y = 0$

3.5 $y'' + 10y' + 25y = 0$

3.6 $y'' - y = 0$

3.7 $y'' - 3y' + 2y = 0$

3.8 $y'' - 24y' + 12y = 0$

3.9 $y'' + 16y' + 3y = 0$

3.10 $y'' + 10y' + 5y = 0$

3.11 La ecuación de un MAS es $x(t) = 2 \cos 30\pi t$, en la que x es la elongación en cm y t en s. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia y el periodo de este movimiento?

ALERTA: La frecuencia es: $f = \frac{1}{P}$

3.12 Un objeto en movimiento armónico simple con frecuencia de 10 Hz tiene una velocidad máxima de 3 m/s. ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

3.13 La frecuencia de una masa que oscila en los extremos de un resorte es de 5 Hz. ¿Cuál es la aceleración de la masa cuando el desplazamiento es 0.15 m?

3.14 Un resorte se estira 0.05 m cuando se le cuelga una masa de 0.3 kg. Responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la constante del resorte?

b) ¿Cuál es la frecuencia de vibración de la masa en el extremo del resorte?

3.15 Un objeto que está fijo a un resorte describe un movimiento armónico simple. Su velocidad máxima es 3 m/s y su amplitud 0.4 m. ¿Cuál es su desplazamiento cuando v = 1.5 m/s?

Resuelve las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler de los problemas 3.16 a 3.25:

3.16 $x^2y'' - 12y = 0$

3.17 $x^2y'' + \frac{2}{3}xy' - \frac{2}{9}y = 0$

3.18 $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

3.19 $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

3.20 $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$

3.21 $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

3.22 $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

3.23 $x^2y'' + xy' - y = 0$

3.24 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

3.25 $x^2y'' + xy' \frac{1}{4} = 0$

Resuelve las ecuaciones diferenciales por variación de parámetros de los problemas 3.26 a 3.30:

3.26 $x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x$

3.27 $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

3.28 $(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}$, $0 < x < 1$

3.29 $y'' + 16y = \cos(4x)$

3.30 $y'' + 2y' - 8y = \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

3.31 Determina el operador anulador de las siguientes expresiones:

a) $13x + 9x^2 - \text{sen } 4x$

b) $3 + e^x\cos 2x$

c) $x^3 - 5x^4$

d) $e^{-x}\text{sen } x - e^{2x}\cos x$

e) $x^2e^x + \text{sen } 2x + 5$

3.32 Utilizando el método de coeficientes indeterminados, determina una solución particular y escribe la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes.

a) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 4x + 2$

b) $y'' - 2y' + 4y = e^{4x}$

c) $y'' + 8y = 16 \text{ sen } x$

d) $y'' + y = 2 \cos 3x$

3.33 Determina la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de variación de parámetros.

a) $9y'' - 6y' + y = x$

b) $9y'' + 4y = e^{-x}$

c) $y'' + 4y = 12 \text{ sen } 2x$

d) $y'' - 3y' + y = 2 \text{ sen } 2x$

e) $y'' - 4y' + 2y = e^x$

f) $y'' + 6y' - 7y = e^{-x}$

g) $y'' + 4y' + 2y = x^3$

h) $y'' + y = 2e^{-x} + 8x$

i) $y'' + y = 2e^{-x} + 2e^x + x$

j) $y'' - y = 2e^{-x} + 2e^x + x$

3.34 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dx}{dt} = x + 4y$

$\frac{dy}{dt} = x + y$

b) $\frac{dx}{dt} = x - 4y$

$\frac{dy}{dt} = x - 3y$

c) $\frac{dx}{dt} = x - 4y$

$\frac{dy}{dt} = x + y$

3.35 Reduce el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y resuélvelas:

a) $xy'' + y' = 0$

b) $(x - 1)y'' - y' = 0$

c) $x^2y'' + x = 1$

d) $(x + 1)y'' = y'$

e) $xy'' - y' = x$

3.36 Para cada una de las siguientes expresiones, determina ω, R y δ para que la expresión dada se escriba en la forma $u = R\cos(\omega t - \delta)$. Utiliza la identidad $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta \cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$.

a) $u = 3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t$

b) $u = 3\cos 5t + 2\operatorname{sen} 5t$

c) $u = 4\cos 8t - 2\operatorname{sen} 8t$

d) $u = -\cos 3t + \sqrt{3}\operatorname{sen} 3t$

3.37 Una masa de 2 N alarga 6 cm un resorte. Si se jala hacia abajo la masa otros 3 cm más y se suelta, suponiendo que no hay resistencia del aire, determina la posición de la masa en cualquier instante t. Determina la frecuencia, el periodo y la amplitud del movimiento.

ALERTA: Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 0.03,\ v(0) = 0$$

3.38 Una masa que pesa 3 N estira 3 cm a un resorte. Si la masa se empuja hacia arriba contrayendo al resorte 1 cm y se pone en movimiento con una velocidad hacia abajo de 2 cm/s y no hay resistencia del aire. Determina la frecuencia, el periodo y la amplitud del movimiento.

ALERTA: Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = -0.01,\ v(0) = 0$$

3.39 Una masa de 20 g estira 5 cm a un resorte; la masa está sujeta a un amortiguador viscoso cuya constante de amortiguamiento es de 0.004 N. Si la masa se jala hacia abajo 2 cm y luego se suelta, encuentra su posición en cualquier tiempo y traza su gráfica.

ALERTA: Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 0.02,\ v(0) = 0$$

3.40 Un resorte se alarga 10 cm por la acción de una fuerza de 3 N. Del resorte cuelga una masa de 2 kg y un amortiguador viscoso que aplica una fuerza de 3 N cuando la velocidad de la masa es de 5 m/s. Si la masa se jala hacia abajo 5 cm por debajo de su posición de equilibrio y se le da una velocidad inicial hacia abajo de 10 cm/s, determina su posición en cualquier instante y traza su gráfica.

ALERTA: Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 0.05,\ v(0) = 10$$

3.41 Demuestra que todas las soluciones de $ay'' + by + c = 0$ tienden a cero conforme $t \to 0$, $y(t)$ y a, b y c son constantes positivas.

3.42 Un objeto en reposo se deja caer desde una altura y_0. El objeto experimenta una fuerza F, debida a la resistencia del aire, que es proporcional a la velocidad en cualquier instante de la caída. Enuncia el problema de valor inicial (como una ecuación diferencial de segundo orden más sus condiciones iniciales) que se debe resolver.

3.43 Determina la solución del problema 3.42; es decir, presenta una expresión que te permita determinar la posición del objeto en cualquier instante. ¿Depende de la masa del objeto?

3.44 Usando la expresión anterior supón que el objeto tarda 5 segundos en golpear el suelo. Si la masa del objeto es de 1 kg, $k = 0.5$, $g = -9.8$ m/s^2, determina la altura del edificio desde donde se deja caer.

3.45 Resuelve el problema 3.42 si no hay resistencia del aire; es decir, determina la posición del objeto en cualquier instante. ¿Depende de la masa del objeto?

3.46 Un objeto de 30 g se lanza desde una altura de 20 m con una velocidad de 4 m/s. El objeto experimenta una fuerza $F = 5$ v, debido a la resistencia del aire, que es proporcional a la velocidad en cualquier instante de la caída. Enuncia el problema de valor inicial (como una ecuación diferencial de segundo orden más sus condiciones iniciales) que se debe resolver.

3.47 Determina la solución del problema 3.46; es decir, presenta una expresión que te permita determinar la posición del objeto en cualquier instante. ¿Depende de la masa del objeto?

3.48 Con referencia al problema anterior, ¿en qué tiempo alcanza su altura máxima y cuál es su valor?

3.49 Resuelve el problema 3.46 si no hay resistencia del aire; es decir, determina la posición del objeto en cualquier instante. ¿Depende de la masa del objeto?

3.50 ¿Cuánto tiempo tarda ahora en tocar el piso?

3.51 Usando el software wxMaxima, resuelve los siguientes problemas de valor inicial y traza su gráfica:

a) $y'' + 3y' + 5y = 0$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$

b) $y'' - y' + 2y = 0$ con $y(0) = 5$ y $y'(0) = 5$

c) $y'' - y' + 2y = x$ con $y(0) = 5$ y $y'(0) = 5$

d) $y'' - y' + 2y = x^3$ con $y(0) = 8$ y $y'(0) = 8$

T **3.52** Usando el software wxMaxima, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y traza las gráficas de las soluciones:

a) $x' = x - y$

$y' = 2x + y$

b) $\left.\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}\right\}$ con $x(0) = 3$, $y(0) = 10$

PROBLEMA RETO

1 El procedimiento de Runge-Kutta es muy efectivo en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho esto, sea el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t) \text{ con } x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t) \text{ con } y(t_0) = y_0$$

El procedimiento de aplicación del método de Runge-Kutta para cada una de las ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales, es el siguiente:

$$k_1 = hf_2(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf_2(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_1, y_n + \frac{1}{2}k_1$$

$$k_3 = hf_2(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}m_2, y_n + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_4 = hf_2(t_n + h, x_n + m_3, y_n + k_3)$$

Tabla 3.1

$m_1 = hf_1(t_n, x_n, y_n)$	$l_1 = hf_2(t_n, x_n, y_n)$
$m_2 = hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)$	$l_2 = hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)$
$m_3 = hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)$	$l_3 = hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)$
$m_3 = hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}\right)$	$l_3 = hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{m_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}\right)$
$m_4 = hf_1(t_n + h, x_n + m_3, y_n + l_3)$	$l_4 = hf_3(t_n + h, x_n + m_3, y_n + l_3)$

Implementa el método de Runge-Kutta en una hoja de cálculo y compara tus resultados con la tabla obtenida con el software de la página: http://www.zweigmedia.com/RealWorld/deSystemGrapher/func.html para el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = x - 2y \qquad x(0) = 1$$

$$y' = x - 5y \qquad y(0) = 2$$

La gráfica que se obtiene es:

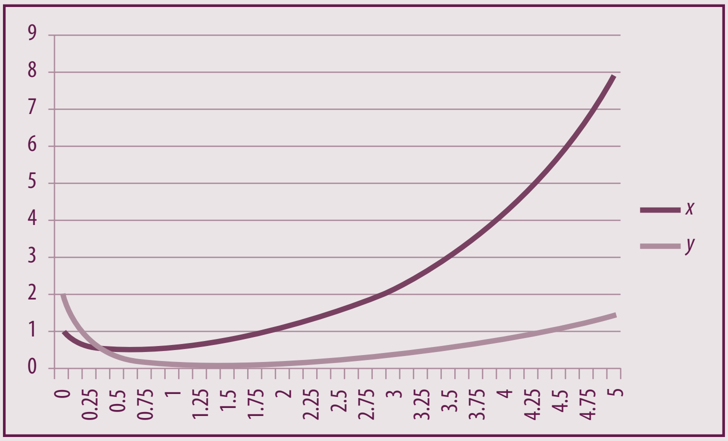


Figura 3.11

REFERENCIAS

Zill, Dennis G. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. 8ª edición,Thomson Learning Iberoamericana. México.

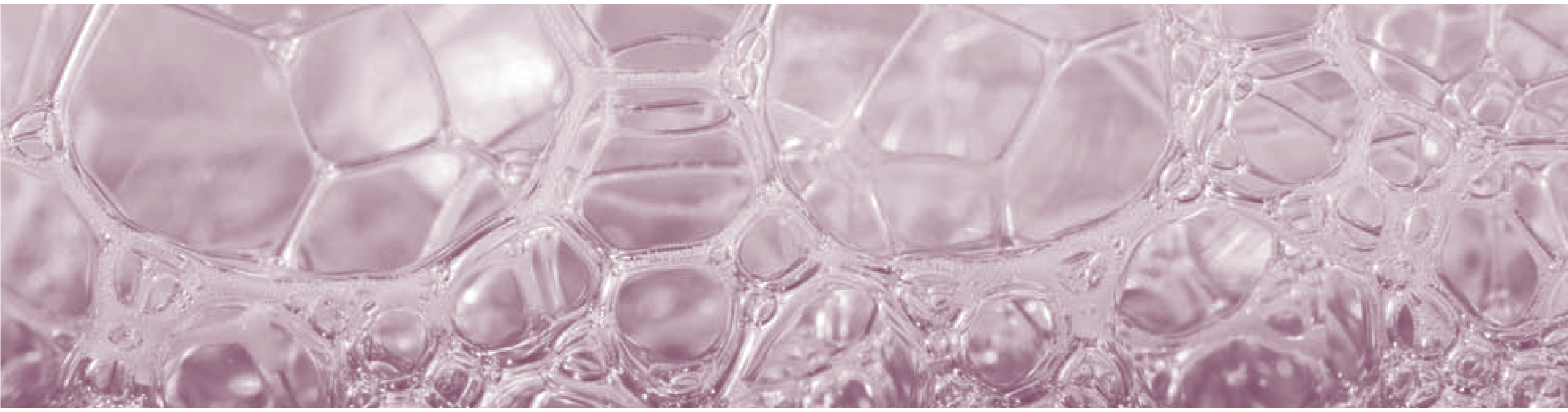
Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice-Hall. México

Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, 4ª edición. Mir. Moscú.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS

http://www.zweigmedia.com/RealWorld/deSystemGrapher/func.html

UNIDAD 4



Solución de ecuaciones con series de potencias

OBJETIVOS

- Comprender los fundamentos del Teorema de Taylor.
- Escribir funciones trascendentes y trigonométricas como polinomio de Taylor.
- Utilizar el Teorema de Taylor para encontrar los valores de una función en cualquier momento, considerando los valores de la función y todas sus derivadas en un momento determinado.
- Calcular los errores y los límites de error de aproximación de una función por series de Taylor.
- Resolver ecuaciones diferenciales usando series de potencias.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cómo se desarrolla una función en series?
- ¿Cuáles son los criterios para que una serie converja?
- ¿Por qué se resuelve una ecuación diferencial con series de potencias?
- ¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial con series de potencias?

4.1 Introducción

Una ecuación lineal sencilla de segundo orden con coeficientes variables, como $y'' + xy = 0$, no tiene soluciones elementales. No obstante, es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación, pero, como veremos, estas soluciones están representadas por series infinitas. En capítulos anteriores se analiza cómo resolver algunas ecuaciones lineales de segundo orden, como las de los coeficientes constantes y algunas de coeficientes variables. Pero, en general, aún no se ha estudiado cómo resolver las ecuaciones lineales con coeficientes variables; de las cuales, algunas aparecen ligadas a importantes problemas de la Física, como las ecuaciones de Legendre, Hermite, Airy, Bessel, etcétera, que son de coeficientes polinomiales.

Asimismo, hasta el momento se sabe que, por lo común, las ecuaciones tienen soluciones expresables en términos de un número finito de funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, etcétera, o las inversas de estas funciones); pero, en general, las soluciones no pueden expresarse tan fácilmente.

Es necesario, por tanto, buscar otros modos de expresar las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden, los cuales propicien, a su vez, nuevos métodos de resolución de las mismas.

Con base en lo expuesto antes, en esta unidad se estudia un método de solución basado en la representación de soluciones mediante series de potencias y series de Frobenius.

4.2 Sucesiones y series

En la representación e incluso en la construcción de funciones, un tipo de series, conocido como series de potencias, desempeña un papel especialmente destacado. Su estudio corresponde a la teoría de funciones de variable compleja más que a la teoría de funciones de variable real, por lo que solo presentaremos algunas propiedades sencillas, pero las suficientes para cumplir nuestros propósitos.

Sucesión infinita

La sucesión infinita de números complejos, $s = z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, tiene *límite* z si, para cada número positivo ε, existe un número positivo n_0 tal que:

$$|z_n - z| < \varepsilon, \qquad \text{si } n > n_0$$

Desde el punto de vista geométrico, para n suficientemente grande, los puntos z_n están en cualquier entorno dado ε de z.

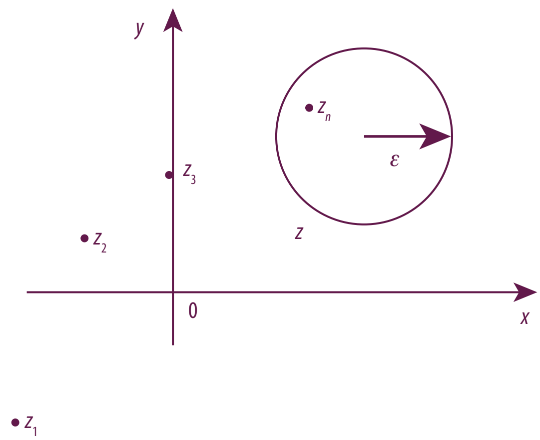


Figura 4.1

La sucesión s puede tener, a lo más, un límite; si existe, este es único. Cuando existe, se dice que la sucesión *converge* a z, y escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Si la sucesión no tiene límite, entonces se dice que *diverge*.

Teorema 4.1

Supongamos que:

$$z_n = x_n + iy_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

y

$$z = x + iy$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Una *serie* infinita $\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \ldots + z_i + \ldots$ de números complejos *converge* con *suma* S si la $S_N = \sum_{i=1}^{N} z_i = z_1 + z_2 + \ldots + z_N$, con $N = 1, 2\ldots$, de *sumas parciales* converge a S.

Entonces:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$$

Una serie puede tener, cuando mucho, **una** suma.
Cuando una serie no converge, entonces, se dice que es *divergente*.

Teorema 4.2

Supongamos que:

$$z_n = x_n + iy_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

y

$$S = X + iY$$

En tal caso:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$$

Si y solo si:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \quad \text{y} \quad Y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

Una condición necesaria para la convergencia de la serie es que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Los términos de una serie convergente de números complejos son, por tanto, acotados. Mas precisamente, existe una constante positiva M tal que:

$$|z_n| \leq M$$

para cada entero positivo n.
El **residuo** ρ_N se define como:

$$\rho_N = S - S_N \rightarrow S = \rho_N + S_N$$

Y, ya que:

$$|S_N - S| = |\rho_N - 0|$$

Una serie converge a un número S si y solo si la sucesión de residuos tiende a cero. Utilizaremos a menudo esta observación al tratar con *series de potencias*; las cuales son series de la forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$$

Donde z_0 y a_n son constantes complejas y z es cualquier punto en una región prefijada que contenga a z_0.

Problema resuelto

Demostrar que la sucesión $z_n = -2 + \dfrac{i(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ a -2.

Solución

Tomamos el límite de z_n cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + iy_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{-2}_{x_n} + \underbrace{\frac{i(-1)^n}{n^2}}_{y_n}\right) = -2 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{i(-1)^n}{n^2}}_{\lim\limits_{n\to\infty} y_n \to 0} = -2$$

Una serie se llama **absolutamente convergente** si la serie de los valores absolutos converge. Si la serie converge, pero no la de valores absolutos, esta es **condicionalmente convergente**.

Prueba de convergencia del cociente

Se dice que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente en un punto x, si $a_n \neq 0$ y si para un valor fijo de x:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} = \left|x-x_0\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

Si $l < 1$, la serie converge absolutamente; pero, si $l > 1$, la serie diverge, y si $l = 1$, la prueba no es concluyente.

Existe un número no negativo ρ llamado radio de convergencia, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $\left|x-x_0\right| < \rho$ y diverge para $\left|x-x_0\right| > \rho$.

Problema resuelto

Determinar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$

Solución

Aplicamos la prueba del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n} = \left|x-3\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = \left|x-3\right|$$

Entonces, la serie converge para $\left|x-3\right| < 1$:

$x - 3 < 1$, entonces $x < 4$, el intervalo solución es $(-\infty, 4)$.

$-x + 3 < 1$, entonces $x > 2$, el intervalo solución es $(2, \infty)$.

Así pues, para la intersección de $(-\infty, 4)$ con $(2, \infty)$, el intervalo de convergencia es $(2, 4)$, con un radio de convergencia de 1.

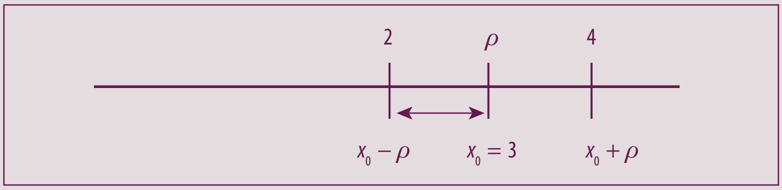


Figura 4.2

Series de Taylor

Teorema de Taylor

Sea f una función analítica en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$ centrado en z_0 y de radio R_0; por tanto, en todo punto z de ese disco, $f(z)$ admite la representación en serie (véase figura 4.3).

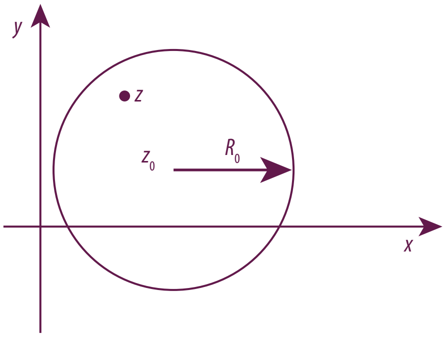


Figura 4.3

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{con} \quad (|z - z_0| < R_0)$$

Donde:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es decir, esa serie de potencias converge a $f(z)$ cuando:

$$|z - z_0| < R_0$$

Este es el desarrollo de $f(z)$ en *serie de Taylor* en torno al punto z_0.

Con el convenio de que $f^{(n)}(z_0) = f(z_0)$ y $0! = 1$,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{1!} + \frac{f''(z - z_0)^2}{2!} + \ldots \qquad \text{con} \quad |z - z_0| < R_0$$

Cuando $f(z)$ es entera, es decir, analítica en todo el plano, el radio R_0 del disco puede tomarse arbitrariamente grande. En estas circunstancias, la serie converge a $f(z)$ en todo punto z del plano finito, y la condición de validez se convierte en:

$$|z - z_0| < \infty$$

Si se sabe que $f(z)$ es analítica en todos los puntos interiores a un círculo centrado en z_0, la convergencia de la serie de Taylor centrada en z_0 hacia el valor $f(z)$ queda garantizada en cada uno de esos puntos z; así, no es necesario ningún criterio de convergencia.

Problema resuelto

Determinar la serie de Taylor válida para todo z de la función $f(z) = e^z$

Solución

Como la función $f(z) = e^z$ es entera, esta tiene una representación en serie de Taylor válida para todo z.

Puesto que $f^{(n)}(z) = e^z$ entonces, $f^{(n)}(0) = 1$

Por tanto:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \infty)$$

Si $z = x + i0$, entonces el desarrollo se convierte en:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Problema resuelto

Determinar la serie de Taylor válida para todo z, de la función $z^2 e^{3z}$.

Solución

La función entera $z^2 e^{3z}$ tiene desarrollo en serie de Taylor. La forma más simple de obtenerla es sustituir z por $3z$ en cada lado y multiplicar, después, la ecuación resultante por z^2:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \qquad (|z| < \infty)$$

Por último, si sustituimos en la sumatoria n por $n - 2$, tenemos:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n \qquad (|z| < \infty)$$

Problema resuelto

Determinar la serie de Taylor válida para todo z de la función $f(z) = \operatorname{senh} z$

Solución

Para $f(z) = \operatorname{sen} z$:

$$f^{(2n)}(0) = 0 \;\; \text{y} \;\; f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

La condición $|z| < °$ es consecuencia del carácter entero de la función.

Puesto que $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$, basta cambiar z por iz y multiplicar el resultado por $-i$ para ver que:

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$

Problema resuelto

Determinar la serie de Taylor válida para todo z de la función $f(z) = \cosh z$

Solución

Cuando $f(z) = \cos z$:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

De manera que esa función entera tiene la siguiente representación en serie de Taylor:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} \qquad |z| < \infty$$

Y como $\cosh z = \cos(iz)$:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} \qquad |z| < \infty$$

Problema resuelto

Determinar la serie de Taylor válida para todo z de la función $\frac{1}{1-z} = z^n \qquad |z| < 1$.

Solución

Las derivadas de la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$, que no es analítica en $z = 1$, son:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En particular, $f^{(n)}(0) = n!$

Por tanto:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

Las series de Taylor se utilizan en muchas aplicaciones. Por ejemplo:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Pero, en realidad, estas expresiones son un caso especial de la serie de Taylor, conocida como serie de Maclaurin. Expresiones como estas nos permiten encontrar valores aproximados de estas funciones, usando operaciones aritméticas básicas de suma, resta, división y multiplicación.

En la serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ si hacemos $z_0 = 0$, obtenemos la siguiente serie de Maclaurin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Problema resuelto

Determinar el valor de $e^{0.25}$ usando los cinco primeros términos de la serie de Maclaurin.

Solución

Los cinco primeros términos de la serie de Maclaurin para e^x son:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$e^{0.25} \approx 1 + 0.25 + \frac{0.25^2}{2!} + \frac{0.25^3}{3!} + \frac{0.25^4}{4!} = 1.2840$$

Por tanto, el valor exacto de $e^{0.25}$, hasta con 5 dígitos significativos, es 1.2840.

Problema resuelto

Sea $f(x) = \text{sen}(x)$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f'(x) = \cos(x)$ y $f''(x) = -\text{sen}(x)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; en este caso, en cierto modo, conocemos el valor de sen(x) y todas sus derivadas. Utilizar la serie de Taylor y toda la información anterior para encontrar el valor de **sen(2)**.

Solución

$x = \frac{\pi}{2}$, $x + h = 2$, $h = 2 - x = 2 - \frac{\pi}{2} = 0.42920$.

Haciendo $z_0 = x$ y $z - z_0 = h$ en la expresión de la serie de Taylor, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$, obtenemos:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f''''(x)\frac{h^4}{4!} + \cdots$$

Con $x = \frac{\pi}{2}$, $x + h = 2$, $h = 2 - x = 2 - \frac{\pi}{2} = 0.42920$.

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'(x) = \cos(x), \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x), \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f'''(x) = -\cos(x), \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''''(x) = \text{sen}(x), \quad f''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Por tanto,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)h + f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^2}{2!} + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^3}{3!} + f''''\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^4}{4!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + 0.42920\right) &= 1 + 0(0.42920) - 1\frac{(0.42920)^2}{2!} + 0\frac{(0.42920)^3}{3!} + 1\frac{(0.42920)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + 0 - 0.092106 + 0 + 0.00141393 + \cdots \\ &\cong 0.90931 \end{aligned}$$

El valor de sen(2) que se obtiene con la calculadora es 0.90930, el cual es muy cercano al valor que acabamos de obtener.

No obstante, es posible obtener un mejor valor usando más términos de la serie.

El valor calculado para sen(2) se puede utilizar junto con el valor de cos(2), que se puede calcular usando la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, para encontrar el valor de sen(x) en algún otro punto. Así, es posible encontrar el valor de sen(x) para cualquier valor de $x = 0$ a 2π y poder utilizar la periodicidad de sen(x); esto es:

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2n\pi), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

para calcular el valor de sen(x) en cualquier otro punto.

Problema resuelto

Encontrar el valor de $f(6)$, dado que $f(4) = 125$, $f'(4) = 74$, $f''(4) = 30$, $f'''(4) = 6$ y todas las demás derivadas mayores de dos, de $f(x)$ en $x = 4$ son iguales a cero.

Solución

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$x = 4$$

$$h = 6 - 4 = 2$$

Ya que la cuarta derivada y las derivadas mayores de dos de $f(x)$ son iguales a cero en $x = 4$.

$$f(4+2) = f(4) + f'(4)2 + f''(4)\frac{2^2}{2!} + f'''(4)\frac{2^3}{3!}$$

$$f(6) = 125 + 74(2) + 30\left(\frac{2^2}{2!}\right) + 6\left(\frac{2^3}{3!}\right) = 125 + 148 + 60 + 8 = 341$$

Considérese que para encontrar $f(6)$ exactamente, solo se necesita el valor de la función y todas sus derivadas en algún otro punto; en este caso, en $x = 4$.

No necesitamos la expresión de la función y todas sus derivadas; la aplicación en serie de Taylor sería redundante si lo que necesitamos conocer es la expresión de la función, ya que solo se tendría que sustituir $x = 6$ en esta expresión para obtener el valor de $f(6)$.

En realidad, el problema planteado se obtuvo de una función conocida: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$; donde $f(4) = 125$, $f'(4) = 74$, $f''(4) = 30$, $f'''(4) = 6$ y todas las demás derivadas más altas son iguales a cero.

El polinomio de Taylor de orden n de una función $f(x)$ con $(n + 1)$ derivadas continuas en el dominio $[x, x + h]$ está dado por:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n(x)$$

En este caso, el residuo está dado por $R_n(x) = \dfrac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ donde $x < c < x + h$.

Problema resuelto

La serie de Taylor para e^x en el punto $x = 0$ está dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Con base en lo anterior, determinar:

a) ¿Cuál es el error de truncamiento (verdadero) en la representación de e^1 si solo se utilizan cuatro términos de la serie?
b) Los límites del error de truncamiento mediante el uso del teorema del residuo.

Solución

a) Si solo se utilizan cuatro términos de la serie, entonces:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2.66667$$

El error de truncamiento (verdadero) proviene de los términos no utilizados de la serie de Taylor, que son:

$$E_t = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots \cong 0.0516152$$

b) Pero, ¿hay alguna otra manera de conocer los límites de este error además de calcularlos directamente?

La respuesta es sí:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n(x)$$

Donde $R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, $x < c < x+h$, y c es algún punto en el dominio $(x,\ x+h)$.

Así, en este caso, si utilizamos cuatro términos de la serie de Taylor, el residuo está dado por: $(x = 0,\ n = 3)$

$$R_3(x) = \frac{(0-1)^{3+1}}{(3+1)!} f^{(3+1)}(c) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(c) = \frac{e^c}{24}$$

Ya que:

$$x < c < x+h \Rightarrow 0 < c < 0+1 \Rightarrow 0 < c < 1.$$

El error está limitado entre:

$$\frac{e^0}{24} < R_3(1) < \frac{e^1}{24} \Rightarrow \frac{1}{24} < R_3(1) < \frac{e}{24} \Rightarrow 0.041667 < R_3(1) < 0.113261$$

Así, el límite del error es menor que 0.113261, mismo que está de acuerdo con el error calculado de 0.0516152.

Problema resuelto

La serie de Taylor para e^x en el punto $x = 0$ está dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Como se pudo comprobar en el problema anterior, al tomar más términos, los límites de error disminuyen y, por tanto, se tiene una mejor estimación de e^1. ¿Cuántos términos se requerirían para obtener una aproximación de e^1 dentro de una magnitud de error verdadero menor que 10^{-6}?

Solución

Usando $n+1$ términos de la serie de Taylor se obtiene un límite de error de:

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$x = 0,\ h = 1,\ f(x) = e^x$$

$$R_n(0) = \frac{(0-1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

Ya que:

$$x < c < x + h \Rightarrow 0 < c < 0 + 1 \Rightarrow 0 < c < 1$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \left|R_n(0)\right| < \frac{e}{(n+1)!}$$

Así, que si queremos determinar cuántos términos se requieren para obtener una aproximación de e^1 dentro de una magnitud de error de verdad menor que 10^{-6}.

$$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-6} \Rightarrow (n+1)! > 10^6 e$$

$$(n+1)! > 10^6 \times 2.7183$$

Puesto que $10! = 3.6288 \times 10^6 \Rightarrow n \geq 9$.

Por lo que con 9 o más términos se obtiene e^1 con un error de 10^{-6} en su valor.

4.3 Series con el sistema algebraico computarizado wxMaxima 11.04.0

Con el software wxMaxima 11.04.0 es posible generar series, e incluso graficarlas. Los comandos que se utilizan para encontrar la serie de cos x y graficarla son:

```
-->     f(x):=cos(x)
        taylor(f(x),x,0,5);
        plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,-2,2]);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos regresa:

```
(%i37)  f(x):=cos(x);
        taylor(f(x),x,0,5);
        plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,-2,2]);
(%o37)  f(x):=cos(x)
```

(%o38)/T/ $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+...$

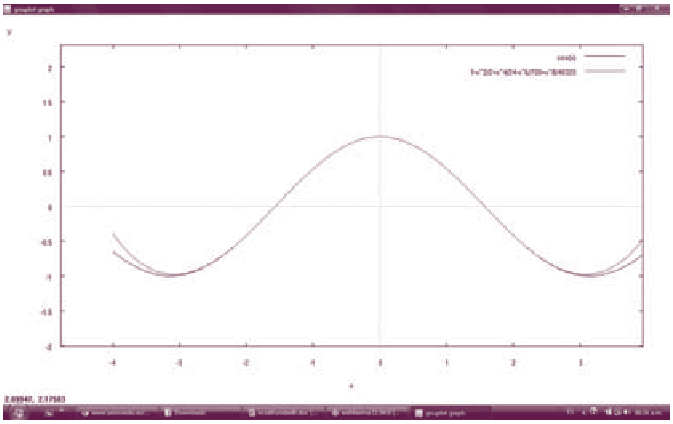


Figura 4.4

4.4 Series de Laurent

Si una función f no es analítica en un punto z_0 no es posible aplicar el Teorema de Taylor en ese punto. Sin embargo, sí es posible determinar una representación en serie para $f(z)$ que contenga tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$.

Teorema de Laurent

Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$, y sea C un contorno cerrado simple en torno de z_0, orientado positivamente, contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

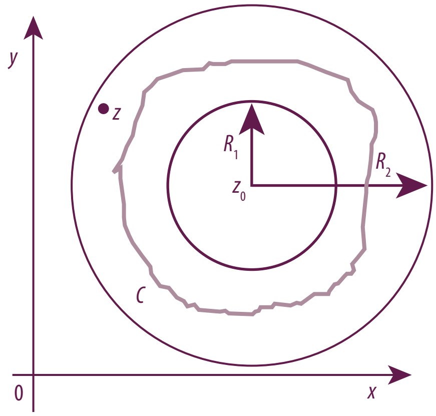


Figura 4.5

Entonces, $f(z)$ suele escribirse:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

A $f(z)$ se le llama *serie de Laurent*.

Los coeficientes de una serie de Laurent no se determinan recurriendo al uso directo de sus representaciones integrales, sino por otros métodos, tal como se muestra en los problemas siguientes.

4.5 Operaciones con series de potencias

Suma

Dos series de potencias se suman término a término. Así pues, sean:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Entonces:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n \ \text{ para toda } |x - x_0| < R.$$

Problema resuelto

Para las series:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \ldots$$

determinar su suma.

Solución

Vamos a sumar término a término y agrupar los términos semejantes:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$

Producto

Esta serie es igual a la serie que se obtiene después de multiplicar dos series entre sí, término a término, y agrupando los términos que resulten potencias iguales de x:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{para toda } |x - x_0| < R$$

Problema resuelto

Determinar el producto de las siguientes series:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \ldots$$

Solución

En este caso, usamos: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Así:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 = 0(1) = 0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0(1) + 1(1) = 1 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0\left(-\frac{1}{2}\right) + 1(2) + (0)(1) = 0 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0(0) + 1\left(-\frac{1}{2}\right) + (0)(1) + \left(-\frac{1}{6}\right)(1) = -\frac{2}{3} \\ \vdots \end{cases}$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \ldots\right)$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \frac{41}{60480}x^9 - \frac{1}{50400}x^{11} + \frac{1}{3628800}x^{13} + \ldots$$

División

A continuación se exlica la división. Iniciamos con la ecuación:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \quad \text{para toda } |x - x_0| < R$$

Donde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}$$

Problema resuelto

Determinar la serie $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ usando las siguientes series:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \ldots$$

Solución

Para formar la serie $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, usando $a_n = \sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}$, empleamos los siguientes coeficientes:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{120}, \ldots$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = 0,\ b_4 = \frac{1}{24},\ b_5 = 0, \ldots$$

Así, para el término $n = 0$:

$$d_0 b_0 = a_0 \Rightarrow d_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

En este caso:

$$a_0 = 0, b_0 = 1 \Rightarrow d_0 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{0}{1} = 0$$

Para el término $n = 1$, la sumatoria va desde $k = 0$ hasta $k = 1$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{1} d_k b_{n-k}$$

$$a_1 = d_0 b_1 + d_1 b_0 \Rightarrow d_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{d_0 b_1}{b_0} = 1$$

Para el término $n = 2$, la sumatoria va desde $k = 0$ hasta $k = 2$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{2} d_k b_{n-k}$$

$$a_2 = d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 \Rightarrow d_2 = \frac{a_2 - d_0 b_2 - d_1 b_1}{b_0} = 0$$

Para el término $n = 3$, la sumatoria va desde $k = 0$ hasta $k = 3$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{3} d_k b_{n-k}$$

$$a_3 = d_0 b_3 + d_1 b_2 + d_2 b_1 + d_3 b_0 \Rightarrow d_3 = \frac{a_3 - d_0 b_3 - d_1 b_2 - d_2 b_1}{b_0} = \frac{-\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{1}{3}$$

Entonces, la serie $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ está dada por:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

El procedimiento realizado en el problema anterior puede repetirse para obtener cualquiera de los coeficientes d_n, donde n es tan grande como deseemos. Este es un ejemplo de procedimiento recurrente, en el que se usan los valores de $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ ya calculados, para encontrar la siguiente incógnita d_n.

Siguiendo el mismo procedimiento, la expresión para la serie es:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$

Desplazar el índice de una sumatoria

El índice de una sumatoria es una serie infinita de una variable ficticia, de la misma manera que la variable de integración en una integral definida es una variable ficticia. Por tanto, no es importante la literal que asignemos, por lo que, así como en una integral se hacen cambios de variable, en las sumatorias podemos realizar cambios y corrimientos de índices.

Problema resuelto

Escribir la serie $\sum_{i=2}^{\infty} i a_i x^{i-2}$ como una serie cuyo término general contenga x^i en lugar de x^{i-2}.

Solución

Como el índice de la sumatoria empieza en $i = 2$, hacemos el cambio de índice por $j = i - 2$; entonces, $j = 2 - 2 = 0$ y, por supuesto, $i = j + 2$; por consiguiente, sustituyendo en la sumatoria, obtenemos:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i a_i x^{i-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2) a_j x^{j+2-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2) a_j x^j$$

Problema resuelto

Escribir la expresión $x\sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2}$ como una serie cuyo término general contenga x^i.

Solución

En este caso, primero introducimos x en la serie; por consiguiente, multiplicamos cada uno de los términos:

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2} x = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-1}$$

Como el índice de la sumatoria empieza en $i = 2$, hacemos el cambio de índice por $j = i - 1$; entonces, $j = 2 - 1 = 1$ y, por supuesto, $i = j + 1$. Así, sustituyendo en la sumatoria, obtenemos:

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2} x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{j+1} x^{j+1-1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{j+1} x^{j}$$

Derivación

Para derivar una sumatoria se deriva el término general y se hace un corrimiento de índices en la sumatoria resultante.

Problema resuelto

Dado $y = \sum_{i=0}^{\infty} i x^i$, determinar y' y y'', así como el coeficiente del término general x^i.

Solución

Primero, derivamos el término general:

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^{i-1}$$

Como el índice de la sumatoria empieza en $i = 0$, entonces ahora lo corremos para que empiece en $i = 1$:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^{i-1} = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \ldots + (i+1)^2 x^i + \ldots$$

Para determinar y'' es necesario derivar a y'.

Entonces, derivamos el término general de:

$$y'' = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (i-1) x^{i-2}$$

Como el índice de la sumatoria empieza en $i = 1$, ahora lo corremos para que empiece en $i = 2$:

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i^2 (i-1) x^{i-2} = 2^2 + (3^2)2x + (4^2)3x^2 + \ldots + (i+2)^2 (i+x) x^i + \ldots$$

4.6 Método para resolver ecuaciones diferenciales alrededor de puntos ordinarios, usando series de potencias

Si una ecuación diferencial es analítica en un punto x_0, entonces su solución también lo es en x_0. Como dicha solución será una función desarrollable en series de potencias, podemos suponer que, en forma general, tendrá la forma siguiente:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Donde c_n cambia para cada función específica.

Problema resuelto

Determinar la solución de la siguiente ecuación diferencial, usando series de potencias.

$$y' - y = 0$$

Solución

Sea $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ la solución general.

Derivándola:

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} i c_i x^{i-1}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

Para poder sumar las series, los exponentes de x deben ser iguales; para ello, hacemos el cambio de variable correspondiente en cada serie.

En la primera serie, tomamos:

$$i - 1 = k \Rightarrow i = k + 1$$

O sea:

$$\sum_{i=1}^{\circ} i c_i x^{i-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

Para la segunda serie tomamos:

$$i = k$$

Entonces, la ecuación queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Agrupando las dos series en una sola, queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1) c_{k+1} + c_k \right] x^k = 0$$

Como $x^k \neq 0$, por ser la solución propuesta, entonces:

$$(k+1) c_{k+1} - k c_k = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \frac{k c_k}{k+1}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Esta es la fórmula de recurrencia, de la cual se obtiene cada una de las constantes para cada uno de los términos de la serie solución. Así:

$$k = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{c_0}{0+1} = c_0$$

$$k = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{1+1} = \frac{c_0}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow c_3 = \frac{c_2}{2+1} = \frac{c_0}{6}$$

$$k = 3 \Rightarrow c_4 = \frac{c_3}{3+1} = \frac{c_0}{24}$$

Entonces:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

$$y = c_0 + c_0 x + \frac{c_0}{2} x^2 + \frac{c_0}{6} x^3 + \frac{c_0}{24} x^4 + \ldots$$

$$y = c_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots \right) = c_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \right)$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente ecuación diferencial usando series de potencias:

$$xy' = y + 1$$

Solución

Para la ecuación diferencial $xy' = y + 1$ se propone como solución:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Entonces, tomamos la primera derivada y multiplicamos por x:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} \Rightarrow xy' = x \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i + 1$$

Así, podemos expresar estas series como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i = c_0 + 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (i c_i - c_i) x^i = c_0 + 1$$

Entonces, del miembro derecho de la ecuación, podemos ver que:

$$c_0 + 1 = 0 \Rightarrow c_0 = -1$$

En tanto, del miembro izquierdo de la ecuación, podemos ver que:

$$kc_k = c_k \quad \text{para } k = 1, 2, ..$$

$$c_1 = c_1$$

$$2c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$3c_3 = c_3 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_k = 0 \quad \text{para } k = 2, 3, ..°$$

Por tanto, la serie solo consta de dos términos y la solución es:

$$y = -1 + c_1 x$$

Problema resuelto

Resolver por series la siguiente ecuación diferencial:

$$(x - 1)y' + (2x + 1)y = 0$$

Solución

Como solución de la ecuación diferencial se propone:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Entonces, derivando se obtiene:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}$$

Y sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$(x-1)\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} + (2x+1)\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i - \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}}_{k=i-1} + 2\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+1}}_{k=i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - c_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$-c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$(k+1)c_k - (k+1)c_{k+1} + 2c_{k-1} = 0, \quad \text{para } k=1,2....$$

$$k = 1 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 + 2c_0 = 0 \Rightarrow -2c_2 = -4c_0 \Rightarrow c_2 = 2c_0$$

$$k = 2 \Rightarrow 3c_2 - 3c_3 + 2c_1 = 0 \Rightarrow -3c_3 = -8c_0 \Rightarrow c_3 = \frac{8}{3}c_0$$

$$k = 3 \Rightarrow 4c_3 - 4c_4 + 2c_2 = 0 \Rightarrow -4c_4 = -\left(\frac{32}{3} + 4\right)c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{11}{3}c_0$$

$$y = c_0\left(1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^4 + \dots\right)$$

Problema resuelto

Resolver por series la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2 + x)y' = (2x+1)y$$

Solución

Como solución de la ecuación diferencial, se propone:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Entonces, derivando se obtiene:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$(x^2+x)\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i-1} = (2x+1)\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i+1}}_{k=i+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i}}_{k=i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 2c_i x^{i+1}}_{k=i+1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i}}_{k=i}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i+1}}_{k=i+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i}}_{k=i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 2c_i x^{i+1}}_{k=i+1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i}}_{k=i}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_{k-1}x^k + c_1x + \sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^k = 2c_0x + \sum_{k=2}^{\infty} 2c_{k-1}x^k + c_0 + c_1x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k$$

Entonces:

$$c_1x = 2c_0x + c_0 + c_1x \Rightarrow c_0 = 0$$
$$c_1x = c_1x$$

y

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} 2c_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k$$

$$(k-1)c_{k-1} + kc_k = 2c_{k-1} + c_k$$

$$(k-1-2)c_{k-1} = (1-k)c_k$$

$$c_k = \frac{k-3}{1-k}c_{k-1} \quad \text{para } k = 2,3\ldots.\infty$$

$$c_2 = \frac{2-3}{1-2}c_{2-1} = c_1$$

$$c_3 = \frac{3-3}{1-3}c_2 = 0$$

$$c_k = 0 \qquad \text{para } k = 4,5\ldots.\infty$$

Por lo que la solución está dada como:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots.$$

$$y = c_1x + c_1x^2 = c_1(x+x^2)$$

Problema resuelto

Resolver por series la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + x^2y' - xy = 0$$

Solución

Como solución de la ecuación diferencial, se propone:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Entonces, se toman la primera y segunda derivada:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i-1}$$

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}$$

Y se sustituyen en la ecuación diferencial:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} + x^2\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i-1} - x\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}}_{k=i-2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i+1}}_{k=i+1} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+1}}_{k=i+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+2-1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)c_{k-1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)c_{k-1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$$

$$2c_2 + 6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)c_{k-1}x^k - c_0x - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$$

$$\Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow 6c_3 - c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{c_0}{6}$$

Entonces, se obtiene la relación de recurrencia:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k-2)c_{k-1} = 0$$

$$c_{k+2} = \frac{2-k}{(k+2)(k+1)}c_{k-1} \qquad \text{para } k = 2, 3 \ldots \infty$$

Para $k = 2$, $c_4 = \dfrac{2-2}{(2+2)(2+1)}c_1 = 0$

Para $k = 3$, $c_5 = \dfrac{2-3}{(3+2)(3+1)}c_2 = -\dfrac{1}{20}c_2 = 0$

Para $k = 4$, $c_6 = \dfrac{2-4}{(4+2)(4+1)}c_3 = -\dfrac{2}{30}c_3 = -\dfrac{1}{15}c_3 = -\dfrac{1}{90}c_0$

Por lo que la serie solución está dada por:

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{90} + \ldots\right) + c_1x$$

Problema resuelto

Resolver por series la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - ye^x = 0$$

Solución

Como solución de la ecuación diferencial, se propone:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Entonces, se deriva dos veces:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}$$

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2}$$

Ahora, se sustituyen ambas derivadas en la ecuación diferencial; así como la serie de e^x:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}}_{k=i-2} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i}_{k=i} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+1}}_{k=i+1} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{x^{i+2}}{2!}}_{k=i+2} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{x^{i+3}}{3!}}_{k=i+3} - \ldots = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$\Rightarrow 2c_2 - c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$6c_3x + \sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - c_1x - \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k - c_0x - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$6c_3x - c_1x - c_0x = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{c_1 + c_0}{6}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$12c_4x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - c_2x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k x^k - c_1x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-1}x^k - c_0\frac{x^2}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-2}\frac{x^k}{2!} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\frac{x^k}{3!} - \ldots = 0$$

$$12c_4x^2 - c_2x^2 - c_1x^2 - c_0\frac{x^2}{2!} = 0$$

$$12c_4 - c_0 - c_1 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_0 + c_1}{12}$$

Haciendo $A = c_0$ y $B = c_1$, tenemos que:

$$c_2 = \frac{A}{2},\; c_3 = \frac{A}{6} + \frac{B}{6},\; c_4 = \frac{A}{12} + \frac{B}{12}$$

Entonces, la solución en serie será:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = A + Bx + \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{6}x^3 + \frac{A}{12}x^4 + \frac{B}{12}x^4 + \ldots$$

$$= A + \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{6}x^3 + \frac{A}{12}x^4 + \ldots + Bx + \frac{B}{6}x^3 + \frac{B}{12}x^4 + \ldots$$

Problema resuelto

Determinar, por el método de series de potencias en torno a $x_0 = 1$, los términos hasta la potencia de grado 4 correspondientes a la solución general de la ecuación diferencial:

$$2y'' + xy' + y = 0$$

Solución

Primero, se efectúa el cambio de variable:

$$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$$

Entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$2y'' + (t+1)y' + y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y'' + \frac{(t+1)}{2}y' + \frac{y}{2} = 0$$

Así:

$$p(t) = \frac{t+1}{2} \quad \text{y} \quad q(t) = \frac{1}{2}$$

En este caso, ambas son analíticas en $t = 0$ con $R_1 = R_2 = \infty$.

Luego, existe una solución analítica en $t = 0$, válida para todo t.

Sustituyendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ en la ecuación diferencial:

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \equiv 0$$

Término independiente: $2 \cdot 2 \cdot 1\, a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\dfrac{a_0 + a_1}{4}$

Coeficiente de t: $2 \cdot 3 \cdot 2\, a_3 + a_1 + 2a_2 + a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\dfrac{a_1 + a_2}{6}$

Coeficiente de t^n: $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n\, a_n + (n+1)a_{n+1} + a_n = 0$

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n}{2(n+1)(n+2)} = -\frac{a_{n+1} + a_n}{2(n+2)} \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2n}$$

Luego:

$$a_2 = -\frac{a_0 + a_1}{4}\;;\; a_3 = -\frac{a_1 - \dfrac{a_0 + a_1}{4}}{6} = -\frac{3a_1 - a_0}{24}$$

$$a_4 = -\frac{a_2 + a_3}{8} = +\frac{\dfrac{a_0 + a_1}{4} + \dfrac{3a_1 - a_0}{24}}{8} = \frac{6a_0 + 6a_1 + 3a_1 - a_0}{192} = \frac{5a_0 + 9a_1}{192}$$

La solución está dada como:

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{24} + \frac{5}{192}(x-1)^4 + \ldots\right]$$

$$+\, a_1\left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{8} + \frac{3}{64}(x-1)^4 + \ldots\right] \qquad \forall\, x$$

4.7 Solución de la ecuación diferencial con puntos singulares

Teorema

Sea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ una ecuación diferencial con un punto singular regular en $x = x_0$, entonces existe al menos una solución de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^{m+r}$$

la cual converge $0 < |x - x_0| < R$.

A esta serie se le conoce como serie de Frobenius, cuyas características principales son:

1. Si $x = x_0$ es un punto ordinario, entonces $r = 0$ y la solución general es:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

2. Si $x = x_0$ es un punto singular regular, la solución general es:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^{m+r}$$

3. Si $x = x_0$ es un punto singular irregular, entonces pueden o no existir soluciones de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^{m+r}$$

Método de Frobenius para resolver una ecuación diferencial

Supongamos una ecuación diferencial de la forma:

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$$

Donde $a(x)$ y $b(x)$ son soluciones analíticas en $x = x_0$.

Multiplicando la ecuación por x^2, tenemos:

$$x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0$$

Sean, entonces:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{m=0} a_m x^m \qquad (4.1)$$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{m=0} b_m x^m \qquad (4.2)$$

Como solución proponemos:

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad (4.3)$$

Derivando:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r-1} \qquad (4.4)$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} \qquad (4.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1) a (4.5) en la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0$$

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} + x\sum_{m=0} a_m x^m \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r-1} + \sum_{m=0} a_m x^m \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0} a_m x^m \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0} b_m x^m \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

Para $m = 0$

$$c_0(r)(r-1)x^r + a_0c_0(r)x^r + b_0c_0x^r = 0$$
$$c_0x^r\left[(r)(r-1) + a_0(r) + b_0\right] = 0$$

El método supone siempre que $c_0 \neq 0$; entonces:

$$(r)(r-1) + a_0(r) + b_0 = 0$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de índices con raíces r_1 y r_2; la r que interviene en la serie es la mayor de las raíces r_1 y r_2.

La primera solución de la ecuación diferencial es, por tanto:

$$y = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

La segunda solución de la ecuación diferencial se determina de acuerdo con los siguientes casos:

1. En el caso $r_1 - r_2 \neq$ número entero, las soluciones de la ecuación diferencial serán:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$
$$y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \qquad b_0 \neq 0$$

2. En el caso $r_1 = r_2 = r$, las soluciones de la ecuación diferencial serán:

$$y_1 = x^{r}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$
$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$$

3. En el caso $r_1 - r_2 =$ entero positivo, las soluciones de la ecuación diferencial serán:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$
$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \qquad b_0 \neq 0, \text{ donde } k \text{ puede ser cero.}$$

Por supuesto, y_1 y y_2 son linealmente independientes y la solución general es:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Caso 1

$$r_1 - r_2 \neq \text{ número entero}$$

Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

Esta ecuación se puede expresar como:

$$y'' + \underbrace{\frac{(x+1)}{2x}y'}_{\text{punto singular en } x=0} + \underbrace{\frac{3}{2x}y}_{\text{punto singular en } x=0} = 0$$

Como solución, proponemos:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Entonces:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$2x\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} + (x+1)\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

Multiplicando por x:

$$2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r+1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

$$2\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}}_{k=m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r+1}}_{k=m+1} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r}}_{k=m} + 3\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1}}_{k=m+1} = 0$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+r)c_{k-1} x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r} + 3\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k+r} = 0$$

$$2r(r-1)c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+r)c_{k-1} x^{k+r} + rc_0$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r} + 3\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k+r} = 0$$

Entonces:

$$2(r)(r-1)c_0 + rc_0 = 0$$

De esta forma, la ecuación de índices es:

$$2r(r-1) + r = 0 \rightarrow 2r^2 - r = 0 \rightarrow r(2r-1) = 0 \rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \text{ y } r_2 = 0$$

Y la relación de recurrencia es:

$$2(k+r)(k+r-1)c_k + (k-1+r)c_{k-1} + (k+r)c_k + 3c_{k-1} = 0$$

$$2(k+r)\left(k+r-1+\frac{1}{2}\right)c_k + (k-1+r+3)c_{k-1} = 0$$

$$2(k+r)\left(k+r-\frac{1}{2}\right)c_k + (k+r+2)c_{k-1} = 0$$

$$c_k = -\frac{(k+r+2)}{2(k+r)\left(k+r-\frac{1}{2}\right)}c_{k-1} \quad \text{para } k = 1,\ 2,\ \ldots\infty$$

Para $r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_k = -\dfrac{\left(k+\frac{5}{2}\right)}{2k\left(k+\frac{1}{2}\right)}c_{k-1}$

Para:

$$k = 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{\left(1+\frac{5}{2}\right)}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}c_0 = -\frac{\frac{7}{2}}{3}c_0 = -\frac{7}{6}c_0$$

$$k = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{\left(2+\frac{5}{2}\right)}{4\left(2+\frac{1}{2}\right)}c_1 = \frac{\frac{9}{2}}{10}c_1 = -\frac{9}{20}c_1 = -\frac{9}{20}\left(-\frac{7}{6}\right)c_0 = \frac{21}{40}c_0$$

$$k = 3 \Rightarrow c_3 = -\frac{\left(3+\frac{5}{2}\right)}{2(3)\left(3+\frac{1}{2}\right)}c_2 = -\frac{\frac{11}{2}}{6\left(\frac{7}{2}\right)}c_2 = -\frac{11}{42}\left(\frac{21}{40}\right)c_0 = -\frac{11}{80}c_0$$

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$

$$y_1 = c_0 x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots\right)$$

Para $r = 0 \Rightarrow c_k = -\dfrac{(k+2)}{2(k)\left(k-\frac{1}{2}\right)}c_{k-1}$

Para:

$$k = 1 \Rightarrow b_1 = -\frac{(1+2)}{2(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)}b_0 = -3b_0$$

$$k = 2 \Rightarrow b_2 = -\frac{(2+2)}{2(2)\left(2-\frac{1}{2}\right)}b_1 = -\frac{2}{3}b_1 = \frac{2}{3}(3b_0) = 2b_0$$

$$k = 3 \Rightarrow b_3 = -\frac{(3+2)}{2(3)\left(3-\frac{1}{2}\right)}b_2 = -\frac{(5)}{6\left(\frac{5}{2}\right)}b_2 = -\frac{1}{3}b_2 = -\frac{1}{3}(2b_0) = -\frac{2}{3}b_0$$

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \qquad b_0 \neq 0$$

$$y_2 = x^0 b_0\left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right)$$

$$y_2 = b_0\left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right)$$

Caso 2

$$r_1 = r_2 = r$$

Resolver la ecuación diferencial:

$$xy'' + y' - y = 0$$

Esta ecuación se puede expresar como:

$$y'' + \underbrace{\frac{y'}{x}}_{\text{punto singular en } x\,=\,0} - \underbrace{\frac{y}{x}}_{\text{punto singular en } x\,=\,0} = 0$$

Como solución, proponemos:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Entonces, derivando:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo las derivadas en la ecuación diferencial:

$$x\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

Ahora, multiplicando por x, la ecuación anterior:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}}_{k=m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r}}_{k=m} - \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1}}_{k=m+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k+r} = 0$$

$$r(r-1)c_0 x^r + \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + rc_0 x^r + \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^{k+r} = 0$$

$r(r-1)c_0 + rc_0 = 0$, como $c_0 \neq 0$, entonces:

$$r(r-1) + r = 0 \Rightarrow r^2 - r + r = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r}-\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r}=0$$

$$(k+r)(k+r-1)c_k+(k+r)c_k-c_{k-1}=0$$

$$(k+r)(k+r-1+1)c_k=c_{k-1}$$

La ecuación de recurrencia es, por tanto:

$$c_k=\frac{c_{k-1}}{(k+r)^2},\ \text{para } k=1,\ 2,\ldots\infty$$

Para $k=1$, $r=0$, $c_1=\dfrac{c_0}{1}=c_0$

Para $k=2$, $r=0$, $c_2=\dfrac{c_1}{(2)^2}=\dfrac{c_0}{4}$

Para $k=3$, $r=0$, $c_3=\dfrac{c_0}{36}$

Para $k=4$, $r=0$, $c_4=\dfrac{c_0}{576}$

Entonces:

$$y_1=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m=x^0\left(c_0+c_0x+\frac{c_0}{4}x^2+\frac{c_0}{36}x^3+\frac{c_0}{576}x^4+\ldots\right)$$

$$y_1=c_0+c_0x+\frac{c_0}{4}x^2+\frac{c_0}{36}x^3+\frac{c_0}{576}x^4+\ldots$$

$$y_1=c_0\left(1+x+\frac{x^2}{(2)^2}+\frac{x^3}{(6)^2}+\frac{x^4}{(24)^2}+\ldots\right)$$

$$y_1=c_0\left(1+x+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}+\ldots\right)$$

$$y_1=c_0\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{(m!)^2}\right)$$

Ahora, obtengamos a y_2.

Entonces, como solución proponemos:

$$y_2=y_1\ln x+x^r\sum_{m=1}^{\infty}b_m x^m \quad\Rightarrow y_2=y_1\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}b_m x^m$$

Derivando a y_2:

$$y'_2=y'_1\ln x+\frac{y_1}{x}+\sum_{m=1}^{\infty}mb_m x^{m-1}$$

$$y''_2=y''_1\ln x+2\frac{y'_1}{x}-\frac{y_1}{x^2}+\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)b_m x^{m-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$xy''_2+y'_2-y_2=0$$

$$x\left(y''_1\ln x + 2\frac{y'_1}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m x^{m-2}\right)$$

$$+\left(y'_1\ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1}\right) - y_1\ln x - \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \;= 0$$

$$\underbrace{(xy''_1 + y'_1 - y_1)}_{=0}\ln x + 2y_1' + x\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m x^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \;= 0$$

$$2y_1' + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \;= 0$$

$$2y_1' + \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)b_m x^{m-1}}_{k=m-1} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1}}_{k=m-1} - \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m}_{k=m} \;= 0$$

$$2y_1' + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)b_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)b_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \;= 0$$

$$2y_1' + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)b_{k+1}x^k + b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)b_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \;= 0$$

$$2y_1' + b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k(k+1)b_{k+1} + (k+1)b_{k+1} - b_k)x^k \;= 0$$

$$2y_1' + b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)^2 b_{k+1} - b_k)x^k \;= 0$$

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \ldots$$

$$y'_1 = 1 + \frac{2x}{(2!)^2} + \frac{3x^2}{(3!)^2} + \frac{4x^3}{(4!)^2} + \ldots$$

$$2\left(1 + \frac{2x}{(2!)^2} + \frac{3x^2}{(3!)^2} + \frac{4x^3}{(4!)^2} + \ldots\right) + b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)^2 b_{k+1} - b_k)x^k \;= 0$$

$$\Rightarrow 2 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -2$$

$$2\left(\frac{2x}{(2!)^2} + \frac{3x^2}{(3!)^2} + \frac{4x^3}{(4!)^2} + \ldots\right) + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)^2 b_{k+1} - b_k)x^k \;= 0$$

$$2\left(\frac{2x}{(2!)^2} + \frac{3x^2}{(3!)^2} + \frac{4x^3}{(4!)^2} + \ldots\right) + (4b_2 - b_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+1)^2 b_{k+1} - b_k)x^k \;= 0$$

$$\Rightarrow x + (4b_2 - b_1)x = 0 \Rightarrow 1 + (4b_2 + 2)x = 0 \Rightarrow 4b_2 = -3 \Rightarrow b_2 = -\frac{3}{4}$$

$$2\left(\frac{3x^2}{(3!)^2} + \frac{4x^3}{(4!)^2} + \ldots\right) + (9b_3 - b_2)x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+1)^2 b_{k+1} - b_k)x^k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6}{(3!)^2} + 9b_3 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 9b_3 = -\frac{1}{6} - \frac{3}{4} = -\frac{11}{12} \Rightarrow b_3 = -\frac{11}{108}$$

$$y_2 = y_1\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$$

$$y_2 = \left(1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \ldots\right)\ln x + \left(-2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \ldots\right)$$

Caso 3

$$r_1 - r_2 = \text{ entero positivo}$$

Resolver la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Esta ecuación se puede expresar como:

$$y'' + \underbrace{\frac{2}{x}y'}_{\text{punto singular en } x = 0} + y = 0$$

Como solución, proponemos:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Entonces:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2} + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

Multiplicando por x la ecuación anterior:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}}_{k=m} + 2\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r}}_{k=m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2}}_{k=m+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + 2\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} = 0$$

Para $k = 0$, obtenemos la ecuación de índices:

$$(r)(r-1)c_0 + 2(r)c_0 = 0$$

Como $c_0 \neq 0$, entonces:

$$(r)(r-1) + 2r = 0 \rightarrow r(r-1+2) = 0 \rightarrow r(r+1) = 0 \rightarrow r_1 = 0 \text{ y } r_2 = -1$$

Por tanto, las soluciones son:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \qquad b_0 \neq 0, \text{ donde } k \text{ puede ser cero.}$$

Para $k = 1$,

$$(1+r)(1+r-1)c_1 + 2(1+r)c_1 = 0$$

$$r(1+r)c_1 + 2(1+r)c_5 = 0 \;\circ\; (r+2)(1+r)c_1 = 0 \;\circ\; c_1 = 0$$

Para $k = 2$

$$(k+r)(k+r-1)c_k + 2(k+r)c_k + c_{k-2} = 0$$

$$(k+r)(k+r-1+2)c_k = -c_{k-2}$$

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k+r)(k+r+1)} \quad \text{para } k = 2,\ 3,\ \ldots\infty$$

La fórmula de recurrencia para $r_1 = 0$ será:

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k)(k+1)} \quad \text{para } k = 2,\ 3,\ \ldots\infty$$

La fórmula de recurrencia para $r_2 = -1$ será:

$$b_k = \frac{-b_{k-2}}{(k-1)(k)} \quad \text{para } k = 2,\ 3,\ \ldots\infty$$

Entonces:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$

Para:

$$k = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{-c_{2-2}}{(2)(2+1)} = -\frac{c_0}{6}$$

$$k = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{-c_1}{(3)(3+1)} = -\frac{c_1}{12} = 0$$

$$k = 4 \Rightarrow c_4 = \frac{-c_2}{(4)(4+1)} = -\frac{c_2}{20} = \frac{c_0}{120}$$

$$k = 5 \Rightarrow c_5 = \frac{-c_3}{(5)(5+1)} = -\frac{c_3}{30} = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow c_6 = \frac{-c_4}{(6)(6+1)} = -\frac{c_4}{42} = -\frac{c_0}{5040}$$

Entonces:

$$y_1 = x^0\left(c_0 - \frac{c_0}{6}x^2 + \frac{c_0}{120}x^4 - \frac{c_0}{5040}x^6 + \ldots\right)$$

$$y_1 = c_0\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)$$

Como:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Entonces:

$$y_1 = c_0 \frac{\text{sen } x}{x}$$

Para $r_2 = -1$:

$$b_k = \frac{-b_{k-2}}{(k-1)(k)} \quad \text{para } k = 2,\ 3,\ \ldots\infty$$

Para:

$$k = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{-b_0}{(2-1)(2)} = -\frac{b_0}{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow b_3 = \frac{-b_{3-2}}{(3-1)(3)} = -\frac{b_1}{6} = 0$$

$$k = 4 \Rightarrow b_4 = \frac{-b_2}{(4-1)(4)} = -\frac{b_2}{12} = \frac{b_0}{24}$$

$$k = 5 \Rightarrow b_5 = \frac{-b_3}{(5-1)(5)} = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow b_6 = \frac{-b_4}{(6-1)(6)} = -\frac{b_4}{30} = -\frac{b_0}{720}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 - \frac{b_0}{2}x^2 + \frac{b_0}{24}x^4 - \frac{b_0}{720}x^6 + \ldots = b_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)$$

Como $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 \cos x$$

Entonces:

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

$$y_2 = (0)y_1 \ln x + x^{-1} b_0 \cos x = x^{-1} b_0 \cos x$$

De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_0 \frac{\text{sen} x}{x} + b_0 \frac{\cos x}{x}$$

4.8 Funciones especiales

Función Gamma

La función $\Gamma(n)$ para $n > 0$ se define como:

$$\Gamma(n) = \oint_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

La fórmula de recurrencia para la función Gamma es:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

Entonces, calculemos $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6 = 3!$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4(6) = 24 = 4!$$

$$\Gamma(6) = 5\Gamma(5) = 5(24) = 120 = 5!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \sqrt{\pi}$$

Solución de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Aplicando el método de Frobenius

Como solución proponemos:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Derivando:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

$$r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0 = 0$$

$$r(r-1) + r - \nu^2 = 0$$

$$r^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \nu \\ r_2 = -\nu \end{cases}$$

Por tanto, existirá una solución de la forma:

$$y = x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+r)(m+r-1) + (m+r) - \nu^2]c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+r)^2 - \nu^2]c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} [(m+r)^2 - \nu^2]c_m x^{m+r}}_{m=k} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2}}_{k=m+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)^2 - \nu^2]c_k x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} = 0$$

Para $k = 0$

$$((r)^2 - \nu^2)c_0 x^r = 0. \text{ Ésta es la ecuación de índices}$$

Para $k = 1$

$$((1+r)^2 - \nu^2)c_1 x^{1+r} = 0 \Rightarrow ((1+\nu)^2 - \nu^2)c_1 = 0 \Rightarrow (1+2\nu)c_1 = 0$$

Como $\nu \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$, entonces:

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(k+r)^2 - \nu^2]c_k x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} = 0$$

La ecuación de recurrencia es:

$$[k(k+2\nu)]c_k + c_{k-2} = 0 \Rightarrow c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)} \text{ para } k = 2,\ 3,\ 4\ldots\infty$$

Para $k = 2$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{c_0}{4(1+\nu)}$$

Para $k = 3$

$$c_3 = -\frac{c_1}{3(3+2\nu)} = 0$$

Para $k = 4$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(4+2\nu)} = -\frac{c_2}{4(2)(2+\nu)} = -\frac{-\frac{c_0}{4(1+\nu)}}{4(2)(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^5(1+\nu)(2+\nu)}$$

Para $k = 5$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5(5+2\nu)} = 0 \Rightarrow c_7 = c_9 = c_{11} = \ldots = 0$$

Entonces:

$$c_{2k} = -\frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)},\ \text{para } k = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Como c_0 es una constante arbitraria, entonces:

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}$$

Y recordando que:

$$\Gamma(1+\nu) = \nu\Gamma(\nu)$$

La fórmula para las c es:

$$c_{2k} = -\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)\Gamma(1+\nu)}$$

$$c_{2k} = -\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(1+\nu+k)},\ \text{para } k = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Por tanto, la solución es:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m+\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

Si $\nu \geq 0$, esta serie converge por lo menos en el intervalo $0 \leq x \leq \infty$.

Funciones de Bessel de primera clase

La serie solución anterior se denota por $J_\nu(x)$, entonces:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(1+\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

Igualmente, si tomamos $r_2 = -\nu$, obtenemos:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(1-\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

De esta forma, las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se conocen como funciones de Bessel de primera clase de orden ν y $-\nu$, respectivamente. Dependiendo del valor de ν, $J_{-\nu}(x)$ puede tener potencias negativas de x y converge en el intervalo $0 < |x| < \infty$.

Soluciones de la ecuación de Bessel

Siempre habrá una y_1 la forma $y_1 = |x|^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ que es $J_\nu(x)$.

Para estudiar la forma y_2 consideramos dos casos, cada uno de los cuales se explica a continuación:

Caso 1

Si $r_1 - r_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu \neq$ entero positivo.

$$\Rightarrow y_2 = |x|^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ que es } J_{-\nu}(x)$$

Por tanto, $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ es solución general.

Caso 2

Si $2\nu =$ entero positivo.

$$\Rightarrow y_2 = J_\nu(x) \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{J_\nu^2(x)}$$

Por tanto, $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 y_2$ es solución general.

Ejemplo del caso 1

Encontrar la solución general de la ecuación:

$2\nu \neq$ entero positivo.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{16}\right)y = 0$$

Como $\nu = \frac{1}{4}$, entonces la solución general en $0 < x < \infty$ es:

$$y = c_1 J_{\frac{1}{4}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{4}}(x)$$

Ejemplo del caso 2

$2\nu =$ entero positivo.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$$

Como $\nu = 4$, entonces la solución general en $0 < x < \infty$ es:

$$y = c_1 J_4(x) + c_2 J_4(x) \int \frac{dx}{x J_4^2(x)}$$

A continuación se explica el proceso para la transformación de una ecuación para convertirla a una ecuación de Bessel.

Sea la ecuación:

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

Sea $z = 2x$, entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\frac{dy}{dz}\right) = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}\left(2\frac{dy}{dz}\right) = 4\frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$4x^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2x\frac{dy}{dz} + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{3}$$

La solución general es:

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(z) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(z)$$

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(2x) \text{ en } 0 < x < \infty$$

4.9 Solución de ecuaciones diferenciales usando el sistema algebraico computacional wxMaxima 11.04.0

Con el software wxMaxima 11.04.0 es posible resolver la ecuación diferencial con series de potencias. Para cargar la ecuación diferencial a resolver en dicho programa, que en este caso es la ecuación de $y''(t) - ty(t) = 0$, y la opción series, los comandos a utilizar son los siguientes:

```
(%i23)   load(series)$
         depends(y,x)$
         eq:'diff(y,x,2)+x*y=0;
         niceindices(series(eq,y,x));
```

(%o25) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + x\,y = 0$

(%o26) series $\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + x\,y = 0,\ y,\ x\right)$

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos regresa:

(%o25) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + x\,y = 0$

(%o26) series $\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + x\,y = 0,\ y,\ x\right)$

La *opción series*, así como el *comando series*, no se encuentran disponibles en wxMaxima 11.04.0; sin embargo, se puede usar el desarrollo en series de Taylor para encontrar la solución en serie de potencias, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

```
(atvalue(y(x),x=0,1);atvalue('diff(y(x),x),x=0,1););.
```

Así, para desarrollar tecleamos los comandos:

```
-->     atvalue(y(x),x=0,1);atvalue('diff(y(x),x),x=0,1);
        odeseries:taylor('diff(y(x),x,2)-x*y(x),x,0,3);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos devuelve un desarrollo en series:

```
(%i29)  atvalue(y(x),x=0,1);atvalue('diff(y(x),x),x=0,1);
        odeseries:taylor('diff(y(x),x,2)-x*y(x),x,0,3);
(%o29) 1
  (%o30) 1
```

$$(\%o31)/T/\ \left.\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right|_{x=0} + \left(\left.\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right|_{x=0} - 1\right)x + \frac{\left(\left.\frac{d^4}{dx^4}\,y(x)\right|_{x=0} - 2\right)x^2}{2} - \frac{\left(3\left(\left.\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right|_{x=0}\right) - \left.\frac{d^5}{dx^5}\,y(x)\right|_{x=0}\right)x^3}{6} + \ldots$$

En este caso, wxMaxima 11.04.0 devuelve $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ y las derivadas siguientes expresadas literalmente; entonces, igualamos a cero y resolvemos. Así pues, tecleamos:

```
-->  solve([at('diff(y(x),x,2),x=0),(at('diff(y(x),x,3),x=0)-1)=0,(at('diff(y(x),x,4),x=0)
     -2)/2=0,-((3*(at('diff(y(x),x,2),x=0))-at('diff(y(x),x,5),x=0)))/6=0,
     [at('diff(y(x),x,2),x=0),at('diff(y(x),x,3),x=0),at('diff(y(x),x,4),x=0),at('diff(y(x),x,5),x=0)]);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 devuelve:

```
(%i32)  solve([at('diff(y(x),x,2),x=0),(at('diff(y(x),x,3),x=0)-1)=0,(at('diff(y(x),x,4),x=0)
        -2)/2=0,-((3*(at('diff(y(x),x,2),x=0))-at('diff(y(x),x,5),x=0)))/6=0,
        [at('diff(y(x),x,2),x=0),at('diff(y(x),x,3),x=0),at('diff(y(x),x,4),x=0),at('diff(y(x),x,5),x=0)]);
```

$$(\%o32)\quad [[\left.\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right|_{x=0} = 0, \left.\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right|_{x=0} = 1, \left.\frac{d^4}{dx^4}\,y(x)\right|_{x=0} = 2, \left.\frac{d^5}{dx^5}\,y(x)\right|_{x=0} = 0]]$$

Donde expresa $y''(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 1$, $y^{(4)}(0) = 2$, $y^{(5)}(0) = 0$.

Entonces, la serie de Taylor de la solución es:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{n!}t^n = 1 + t + \frac{0t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{0t^4}{4!} + \frac{0t^5}{5!} + \ldots = 1 + t + \frac{t^3}{6} + \ldots$$

4.1 Determina el valor de e^3 usando los primeros cinco términos de la serie de Maclaurin.

4.2 Determina el valor de sen(π) usando los primeros cinco términos de la serie de Maclaurin y calcula el error.

4.3 Determina el valor de tan($\pi/2$) usando los primeros tres términos de la serie de Maclaurin. ¿Es buena aproximación?

4.4 Escribe los primeros cinco términos de las series de las siguientes funciones en los puntos dados.

a) $y = \operatorname{sen} x,\ a = \dfrac{\pi}{2}$

b) $y = \cos x,\ a = 0$

c) $y = xe^x,\ a = 0$

4.5 Representa la función $y = e^{\operatorname{sen} x}$ por medio de series de potencias, en el punto $x = 0$.

4.6 Indica si los siguientes límites son iguales a cero:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\operatorname{sen}\dfrac{2}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^5+1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-n}$

ALERTA: Recuérdese que: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$

4.7 Con base en tus respuestas al problema anterior, indica la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\left(\operatorname{sen}\dfrac{2}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n^5+1}\right)$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$

4.8 Demuestra el término general de la serie de Maclaurin de:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

4.9 Deriva la expresión del sen x dada en el problema anterior para obtener el término general de la serie de Maclaurin de cos x.

4.10 Determina y y y', dado que $y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ y escribe los cuatro primeros términos de cada término, así como el coeficiente de x^n del término general.

4.11 Haciendo corrimiento de índices, comprueba las siguientes expresiones:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

4.12 Resuelve la ecuación diferencial $y' + y = 0$, usando series de potencias, e identifica qué función representa la serie.

4.13 Resuelve la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + y = 0$, usando series de potencias.

4.14 Resuelve la ecuación diferencial $y'' - 2x^2 y = 0$, usando series de potencias.

4.15 Determina el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} x^n$.

4.16 Indica por qué el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} x^n$ es $\rho = \infty$.

4.17 Determina el radio de convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$.

4.18 Usando las series de sen x y de cos x, determina la serie de sen $2x$, utilizando la identidad sen $2x = 2$ sen x cos x y operaciones con series.

4.19 Usando la serie de Taylor, determina la serie de cot x. ¿Por qué en esta serie no se utiliza el método del problema anterior?

4.20 Determina la solución por series de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales que se indican:

$$y'' - xy' - y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$$

4.21 Determina la solución por series de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones iniciales que se indican:

$$(2 + x)y'' - xy' + 4y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 3$$

4.22 Los polinomios de Hermite se definen, conforme la fórmula de Rodrigues, como: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$. Utilizando esta fórmula, determina los cinco primeros polinomios de Hermite.

4.23 Genera los cinco primeros polinomios de Hermite, con la función generatriz de los polinomios de Hermite:

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

Sugerencia: Desarrolla en serie a la exponencial.

4.24 Utiliza las fórmulas de recurrencia a los polinomios de Hermite, para que a partir de $H_0(x)$ de $H_1(x)$ generen los tres siguientes polinomios de Hermite.

ALERTA: Fórmulas de recurrencia para polinomios de Hermite:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

4.25 Con un ejemplo, muestra que los polinomios de Hermite satisfacen la relación de ortogonalidad.

ALERTA: Relación de ortogonalidad de los polinomios de Hermite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$

4.26 La ecuación $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$, $-\infty < x < \infty$, en donde λ es una constante, se conoce como ecuación de Hermite, la cual se considera una ecuación importante en física y en matemáticas. Dicho lo anterior, encuentra los primeros términos de cada una las dos soluciones independientes en torno a $x = 0$.

4.27 Para la ecuación de Legendre

$$(1 - t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + \alpha(\alpha - 1)x = 0,$$

α es un parámetro real. Determina dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias alrededor de $t = 0$.

4.28 Determina dos soluciones en serie de la ecuación

$$u'' - xu = 0$$

4.29 La ecuación diferencial de Airy se define como $y'' \pm k^2xy = 0$. Resuelve esta ecuación usando series.

4.30 Los polinomios de Legendre se definen, con la fórmula de Rodrigues, como: $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$, $n = 0, 1, 2...$

Utilizando esta fórmula determina los cinco primeros polinomios de Legendre.

4.31 Los polinomios de Legendre, calculados a partir de la fórmula de Rodrigues, no están normalizados.

ALERTA: La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$.

La norma se define por $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.

Dichos polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Normaliza los cinco polinomios de Legendre obtenidos en el problema 4.30.

4.32 Con un ejemplo, muestra que los polinomios de Legendre que obtuviste en el problema anterior satisfacen la relación de ortogonalidad.

4.33 Utiliza las fórmulas de recurrencia a los polinomios de Legendre, para que a partir de los polinomios de Legendre que obtuviste en el problema, 4.31 generes otros polinomios de Legendre.

ALERTA: Fórmulas de recurrencia de polinomios de Legendre:

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

$$\frac{x^2-1}{n}\frac{dP_n}{dx} = xP_n - P_{n-1}$$

$$(2n+1)P_n = \frac{d}{dx}(P_{n+1} - P_{n-1})$$

T **4.34** Con wxMaxima 11.04.0 determina la serie de Taylor y traza la gráfica de $f(x) = e^{x^2}$.

T **4.35** Con wxMaxima 11.04.0 determina la serie de Taylor y traza la gráfica de $f(x) = x + 5e^{x^2}$.

T **4.36** Con wxMaxima 11.04.0 determina la serie de Taylor y traza la gráfica de $f(x) = x + \operatorname{sen}(x^2)$, variando el número de términos en la serie en el comando `taylor(f(x),x,0,15)`, para un mejor ajuste.

T **4.37** Con wxMaxima 11.04.0 determina la serie de Taylor y traza la gráfica de $f(x) = x + e^{\operatorname{sen}(x^2)}$, ajustando a 15 el número de términos con el comando `taylor(f(x),x,0,15)`, para un mejor ajuste.

T **4.38** Con wxMaxima 11.04.0 determina 30 términos de la serie de Taylor, de $f(x) = 6e^x + e^{\operatorname{sen}(x^2)}$.

ALERTA: Con wxMaxima 11.04.0, usando el comando:

'f(x) = niceindices(powerseries(f(x), x, 0));

Obtienes el término general de la serie de una función.

4.39 Obtén los términos generales de las series:

a) sen x

b) cos x

c) e^x

4.40 Con wxMaxima 11.04.0 determina la solución en series en torno de $x_0 = 0 \left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ de $\frac{d^2y}{dx^2} + 6xy = 0$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$.

4.41 Con wxMaxima 11.04.0 determina la solución en series en torno de $x_0 = 0 \left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ de $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$.

4.42 Con wxMaxima 11.04.0 determina la solución en series en torno de $x_0 = 1 \left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$ de $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ $y(1) = 1$ y $y'(1) = 1$.

4.43 Con wxMaxima 11.04.0 determina la solución en series en torno de $x_0 = 0 \left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ de $y'' - y = 0$ con $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$; asimismo, calcula la solución exacta y traza la gráfica en wxMaxima 11.04.0 de ambas curvas solución.

4.44 Con wxMaxima 11.04.0 determina la solución en series en torno de $x_0 = 1 \left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$ de $y'' - xy' - y = 0$ con $y(1) = 1$ y $y'(1) = 1$; asimismo, calcula la solución exacta y traza la gráfica en wxMaxima 11.04.0 de la curva solución.

Con base en la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$, realiza lo que se te pide en los problemas 4.45 a 4.49.

4.45 Usando wxMaxima 11.04.0 resuelve en series en torno de $x_0 = 1$ para $n = 0$ y con condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$, y comprueba que el polinomio de Laguerre de orden 0 es $L_0(x) = 1$.

4.46 Usando wxMaxima 11.04.0 resuelve en series en torno de $x_0 = 1$ para $n = 1$, y con condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, y comprueba que el polinomio de Laguerre de orden 1 es $L_1(x) = 1 - x$.

4.47 Usando wxMaxima 11.04.0 resuelve en series en torno de $x_0 = 1$ para $n = 2$ y con condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=-2$, y comprueba que el polinomio de Laguerre de orden 2 es $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$.

4.48 Usando wxMaxima 11.04.0 resuelve en series en torno de $x_0 = 1$ para $n = 3$ y con condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=-3$, y comprueba que el polinomio de Laguerre de orden 3 es $L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$.

4.49 Usando wxMaxima 11.04.0 resuelve en series en torno de $x_0 = 1$ para $n = 4$ y con condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=-3$, y comprueba que el polinomio de Laguerre de orden 4 es

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$

4.50 Usa la función generatriz de los polinomios para generar los polinomios de Laguerre que acabas de encontrar en los problemas 4.45 a 4.49.

ALERTA: La función generatriz de los polinomios de Laguerre es:

$$L_3(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

4.51 Usando la ecuación de recurrencia de los polinomios de Laguerre, obtén los polinomios de orden 5 al 6.

La ecuación de recurrencia de los polinomios de Laguerre es

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

4.52 Da un ejemplo de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre usando su relación de ortogonalidad:

$$\langle L_m, L_n \rangle = \int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x}\, dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

PROBLEMA RETO

1 La fuerza que ejerce un resorte muy gastado se modela como $F = -ke^{-at}x$ con $a > 0$; por tanto, si se une a un objeto y se hace oscilar horizontalmente, la ecuación de movimiento será $mx'' + ke^{-at}x = 0$. Con base en lo anterior, realiza el cambio de variable $s = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-at/2}$, identifica el tipo de ecuación que se obtiene y resuélvela.

REFERENCIAS

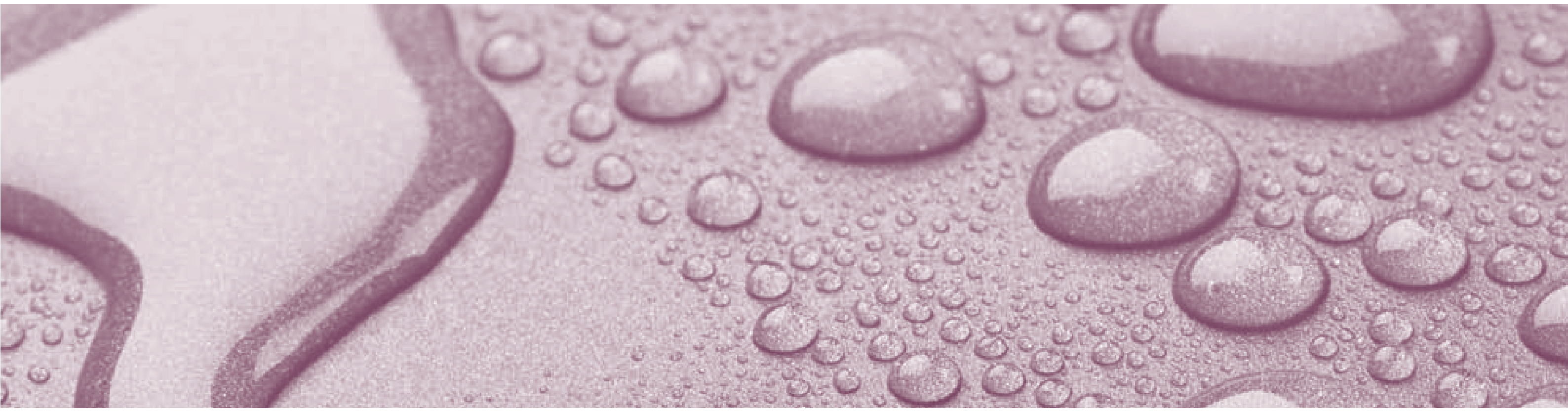
Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. (1984). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias,* 4ª edición. Mir. Moscú.

Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Prentice-Hall. México

Zill, Dennis G. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.* 8ª edición,Thomson Learning Iberoamericana. México.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS

http://andrejv.github.com/wxmaxima



Solución de ecuaciones con transformadas de Laplace

OBJETIVOS

- Obtener transformadas de Laplace de diferentes funciones.
- Enunciar y demostrar el teorema de existencia de la transformada de Laplace.
- Conocer las propiedades de las transformadas de Laplace.
- Obtener la transformada inversa de la transformada de Laplace.
- Aplicar el método de la transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial.
- Resolver problemas físicos en los que se demuestre la conveniencia de emplear la transformada de Laplace.

¿QUÉ SABES?

- ¿Cómo se obtiene una transformada de Laplace?
- ¿Cuáles son los principios del teorema de existencia de la transformada de Laplace?
- ¿Es posible reducir un problema de valor inicial a un problema algebraico?
- ¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial con transformadas de Laplace?

5.1 Introducción

La **transformada de Laplace** es un método operacional que se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales lineales, debido a que su uso hace posible que diversas funciones senoidales, senoidales amortiguadas y exponenciales, se puedan convertir en funciones algebraicas de una variable compleja *s*; asimismo, permite reemplazar operaciones como la derivación y la integración por operaciones algebraicas de funciones complejas equivalentes. Esto es, a través del método de la transformada de Laplace, una ecuación diferencial lineal se puede transformar en una ecuación algebraica de la variable compleja *s*; por tanto, si esa ecuación algebraica se resuelve en *s* para la variable dependiente, se obtiene la solución de la ecuación diferencial. Este procedimiento, que implica la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente, se realiza empleando dos métodos:

1. Tabla de transformadas de Laplace.
2. Técnica de desarrollo en fracciones parciales.

En el método de la transformada de Laplace es característico el uso de técnicas gráficas para predecir y/o analizar el funcionamiento de un sistema sin tener que resolver ecuaciones diferenciales. Otra ventaja del método de Laplace es que por medio de este es posible resolver la ecuación diferencial obteniendo, simultáneamente, las componentes del estado transitorio y estacionario de la solución.

5.2 Variable compleja *s*

La variable *s* es de tipo complejo con una componente variable real y una imaginaria. Esto es:

$$s = \sigma + i\omega$$

Donde σ es la parte real y ω es la parte imaginaria.

5.3 Función compleja *F*(*s*)

Una función compleja $F(s)$ tiene una parte real y una parte imaginaria:

$$F(s) = F_x + iF_y$$

Donde F_x y F_y son cantidades reales.

La magnitud de $F(s)$ está dada por:

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

En tanto, el ángulo σ de $F(s)$ es:

$$\tan^{-1}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)$$

El ángulo de $F(s)$ se mide de derecha a izquierda a partir del semieje real positivo.

El complejo conjugado de $F(s)$ es:

$$\overline{F}(s) = F_x - jF_y$$

Se dice que una función compleja $F(s)$ es analítica en una región, si $F(s)$ y todas sus derivadas existen en esa región.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{F(s+\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta s}$$

Los puntos del plano *s* en los que la función $F(s)$ es analítica reciben el nombre de puntos ordinarios, mientras que los puntos del plano *s* en los que la función $F(s)$ no es analítica se denominan puntos singulares; a estos últimos puntos también se les denomina polos. Los puntos en los que la función $F(s)$ es igual a cero, se denominan ceros.

5.4 Transformada de Laplace

Definición de la transformada de Laplace

La definición de la transformada de Laplace se plantea de la siguiente forma.

Sea:

$f(t)$ = Función de tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

s = Variable compleja

$F(s)$ = Transformada de Laplace de $f(t)$

L = Símbolo operacional que indica que la cantidad a la que precede debe transformarse por la integral de Laplace:

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

Entonces, la transformada de Laplace de $f(t)$ está dada por:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

Por tanto, se le llama transformada de Laplace de la función $f(t)$ si la integral existe.

Si una función $f(t)$ tiene transformada de Laplace, la transformada de la función $Af(t)$, donde A es una constante, está dada por:

$$L[Af(t)] = AL[f(t)]$$

Esto es obvio, partiendo de la definición de transformada de Laplace. En forma similar, si las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tienen transformada de Laplace, la transformada de Laplace de la función $f_1(t) + f_2(t)$, está dada por:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$$

De nuevo, la prueba de esta relación es evidente a partir de la definición de la transformada de Laplace.

A continuación, en la siguiente serie de problemas resueltos, se determinan las transformadas de Laplace de algunas funciones.

Problema resuelto

Encontrar $L\{c\}$, donde c es un real.

Solución

Por definición:

$$L\{c\} = \int_0^\infty e^{-st} c\, dt = \lim_{b\to\infty} c \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} c \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b$$

$$L\{c\} = \lim_{b\to\infty} c\, \frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{c}{s} \quad \text{para } s > 0$$

$$L\{c\} = \frac{c}{s}$$

Problema resuelto

Encontrar $L\{t\}$.

Solución

Por definición:

$$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt$$

Usando integración por partes:

$$\int_0^\infty e^{-st} t \, dt = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \, dt = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Entonces:

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Problema resuelto

Encontrar $L\{t^2\}$.

Solución

Por definición:

$$L\{t^2\} = \int_0^\infty e^{-st} t^2 \, dt$$

$$L\{t^2\} = -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty t e^{-st} dt$$

$$L\{t^2\} = -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty t e^{-st} dt \right)$$

$$L\{t^2\} = -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2t}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$L\{t^2\} = -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2t}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{2}{s^3}$$

Entonces:

$$L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Generalizando los resultados de los dos problemas anteriores:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{para } n = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Problema resuelto

Encontrar $L\{e^{at}\}$.

Solución

Por definición:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a},\ s > a$$

Entonces:

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ s > a$$

Problema resuelto

Encontrar la transformada de Laplace de la función escalón unitario o función de Heaviside.

Solución

La función escalón unitario está dada por:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < a \\ 1 \text{ para } t \geq a \end{cases}$$

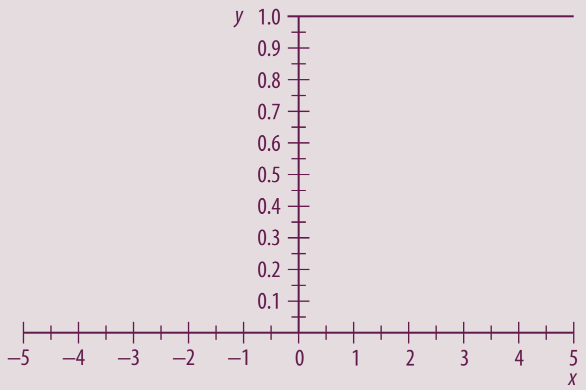
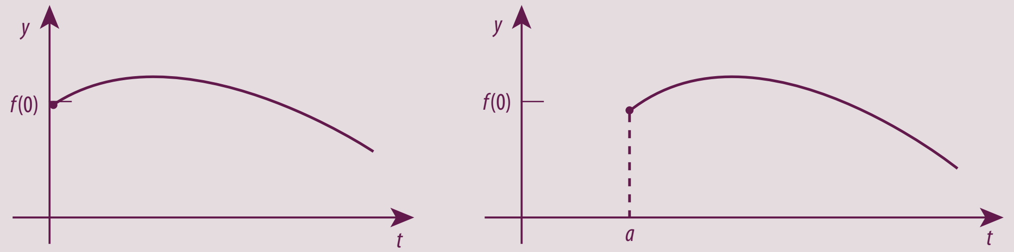


Figura 5.1 Función $u_0(x)$.

Por tanto, aplicando la definición, la transformada de Laplace de la función de Heaviside, es:

$$L[u_a(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}u_a(t)dt = \int_a^{\infty} e^{-st}\,dt = \frac{e^{-as}}{s} \text{ con } s > 0$$

Físicamente, una función escalón producida en $t = 0$ corresponde a una señal constante aplicada súbitamente al sistema, en el instante en que el tiempo t es igual a cero.
El efecto de multiplicar una función por una función de Heaviside, es trasladar la función:



a) $y = f(t)$; b) $y = f(t - a)u_a(t)$;

Figura 5.2

Problema resuelto

Trazar la gráfica de la función:

$$u_1(x) + 2u_3(x) - 6u_4(x)$$

Solución

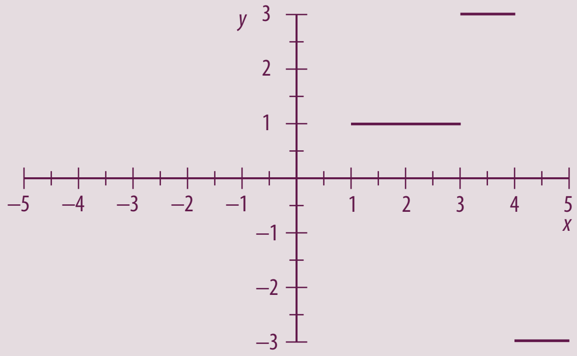


Figura 5.3
Función $u_1(x) + 2u_3(x) - 6u_4(x)$.

Problema resuelto

Trazar la gráfica de la función:

$$u_1(x)e^x$$

Solución

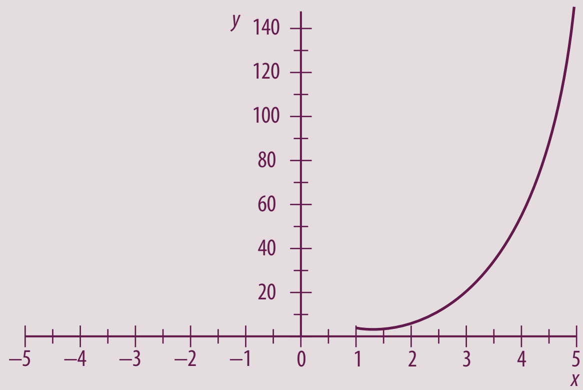


Figura 5.4
Función $u_1(x)e^x$.

Una variante de la función de Heaviside es:

$$u_{\Delta a,a}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta t} & \text{si } a - \Delta t \; ° \; t \; ° \; a + \Delta t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, esta se define:

$$\delta_a = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} u_{\Delta a,a}(t) & \text{si} \quad t = a \\ 0 & \text{si} \quad t \; ° \; a \end{cases}$$

A esta última función se le conoce como **función delta de Dirac**.

Por su parte, se llama **función de impulso** a cualquier función que se obtenga como una combinación lineal de funciones delta de Dirac (véase figura 5.5).

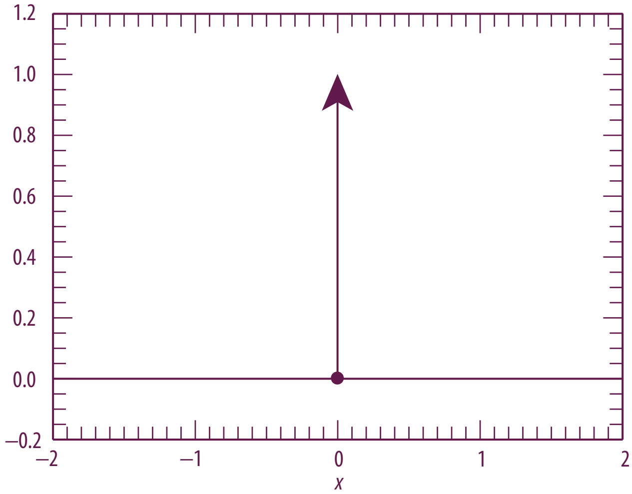


Figura 5.5
Función delta de Dirac.

La transformada de Laplace de la función delta de Dirac es:

$$L(\delta_a) = e^{-as}$$

Problema resuelto

Encontrar la transformada de Laplace de la función rampa.

Solución

La función rampa está dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ \text{para} \ t < 0 \\ At \ \text{para} \ t \geq 0 \end{cases}$$

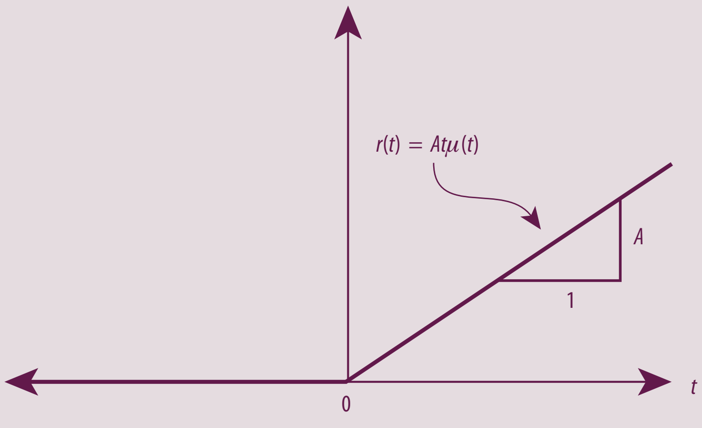


Figura 5.6

Donde A es una constante.

La transformada de Laplace de esta función rampa, por tanto, está dada por:

$$L[At] = \int_0^\infty Ate^{-st}\,dt = At\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}dt = \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{A}{s^2}$$

Problema resuelto

Encuentra la transformada de Laplace de la función seno:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ A \text{ sen } \omega t \text{ para } t \geq 0 \end{cases}$$

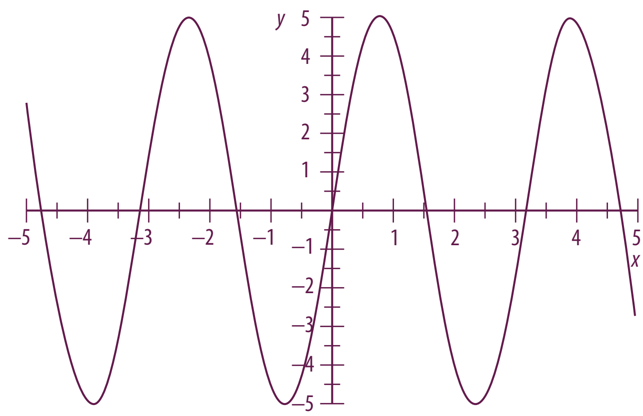


Figura 5.7

Donde A y w son constantes.

Solución

La transformada de Laplace se obtiene del modo siguiente:

Primero, el sen ωt se puede escribir como:

$$\text{sen } \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Por tanto:

$$L[A \text{ sen } \omega t] = \frac{A}{2i}\int_0^\infty (e^{i\omega t} - e^{i\omega t})e^{-st}\, dt = \frac{A}{2i}\frac{1}{s - i\omega} - \frac{A}{2i}\frac{1}{s + i\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Asimismo, la transformada de Laplace de A cos ωt se puede obtener de la siguiente forma:

$$L[A \cos \omega t] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

Transformadas de Laplace con wxMaxima 11.04.0

Para evaluar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{a+2t}$ sen t en el software wxMaxima 11.04.0 se teclea lo siguiente:

```
-->     laplace(%e^(a+2*t)*sin(t)*t,t,s);
```

quede esta forma, se obtiene la transformada de Laplace:

```
(%i3)  laplace(%e^(a+2*t)*sin(t)*t,t,s);
```

$$(\%o3) \quad \frac{\%e^a(2s-4}{(s^2-4\ s+5)^2}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

La transformada de cualquier función $f(t)$ transformable de Laplace se obtiene fácilmente multiplicando $f(t)$ por e^{-st}, e integrando el producto desde $t = 0$ hasta $t = \infty$. Una vez conocido el valor de la transformada de Laplace, no es necesario deducir cada vez a la transformada de Laplace de $f(t)$.

Teorema 1

La transformada de Laplace es un operador lineal; esto es: para cada función $f(t)$ y $g(t)$, cuya transformada de Laplace exista, y para cualesquiera constantes a y b, tenemos:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

Problema resuelto

Determinar la transformada de Laplace de $e^{i\omega t}$.

Solución

$$L\{e^{i\omega t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t}\,dt = -\frac{1}{s-i\omega}e^{-(s-i\omega)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega}$$

$$L\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s-i\omega}\frac{(s+i\omega)}{(s+i\omega)} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

Por el teorema de De Moivre:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i\operatorname{sen} \omega t$$

$$L\{e^{i\omega t}\} = L\{\cos \omega t + i\operatorname{sen} \omega t\} = L\{\cos \omega t\} + iL\{\operatorname{sen} \omega t\}$$

Entonces:

$$L\{\cos\ \omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \ \text{ y } \ L\{\operatorname{sen}\ \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Problema resuelto

Determinar la transformada de Laplace de la siguiente suma de funciones usando wxMaxima 11.04.0:

$$f(t) = 5 \operatorname{sen} t + 9 \cos t$$

Solución

En wxMaxima 11.04.0 se teclea lo siguiente:

```
-->     laplace(5*sin(t)+9*cos(t),t,s);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos devuelve:

```
(%i6)  laplace(5*sin(t)+9*cos(t),t,s);
```

$$\text{(\%o6)}\quad \frac{9s}{s^2+1}+\frac{5}{s^2+1}$$

Teorema de traslación sobre el eje s

Si la transformada de Laplace $L\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces $L\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$ para $s > \alpha + a$.

Demostración:

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a)$$

Problema resuelto

Determinar la transformada de Laplace de e^{at} sen bt, usando el teorema de traslación.

Solución

$$L\left\{e^{at}\text{sen } bt\right\} = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

Problema resuelto

Determinar la transformada de Laplace de la siguiente multiplicación de funciones usando wxMaxima 11.04.0:

$$f(t) = e^{3t}\cos 5t$$

Solución

En wxMaxima 11.04.0 se teclea:

```
-->    laplace (%e^(3*t)*cos(5*t),t,s);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos devuelve:

```
(%i7)  laplace (%e^(3*t)*cos(5*t),t,s);
```

$$\text{(\%o7)} \quad \frac{s-3}{s^2-6s+34}$$

Repetir este problema en tu cuaderno utilizando el teorema anterior.

Transformada de la derivada de una función

Sea $f(t)$ continua en $[0, \infty)$ y $f'(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, ambas de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Demostración:

Puesto que $L\{f'(t)\}$ existe, se puede integrar por partes:

$$u = e^{-st} \text{ y } dv = f'(t)dt$$

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}f'(t)\,dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\Big|_0^N + s\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt\right] = \lim_{N\to\infty}\left[e^{-sN}f(N) - f(0)\right] + sF(s)$$

Pero:

$$\lim_{N\to\infty}\left[e^{-sN}f(N)\right] = 0$$

Entonces:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Transformada de la segunda derivada de una función

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

En general:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Derivadas de la transformada de Laplace

Sea $F(s) = L\{f(t)\}$ y supóngase que $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$:

$$L\{t^nf(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{de^{-st}}{ds}f(t)\,dt = -\int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt = -L\{tf(t)\}$$

Transformada de la integral de una función

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}L\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Transformada inversa de Laplace

Si $L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ se llama transformada inversa de $F(s)$.

Se llama **transformada inversa de Laplace** al proceso inverso de hallar en tiempo $f(t)$, a partir de la transformada de Laplace $F(s)$.

La notación de la transformada inversa de Laplace es:

$$L^{-1} \text{ así } L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Como se vio antes:

$$L(1) = \frac{1}{s} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

La transformada de Laplace de t^n:

$$L(t^n) = \int_0^\infty t^ne^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = t^n$$

L^{-1} es una transformación lineal

En sí, se supone que la transformada inversa de Laplace es una transformación lineal; esto es, si A y B son constantes, entonces:

$$L^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha L^{-1}(F(s)) + \beta L^{-1}(G(s)) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Donde F y G son las transformadas de las funciones f y g. Las transformadas de Laplace más comunes se resumen en la tabla que se muestra a continuación:

Tabla 5.1 Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$t^n e^{-\alpha t}$ con n entero positivo	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}} \quad s>\alpha$
$A\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$
$A\cos\omega t$	$\frac{As}{s^2+\omega^2}$
$Ae^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{A\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$Ae^{-at}\cos\omega t$	$\frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$ con $s>0$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ con $a>0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Para determinar la transformada de Laplace inversa, se usa la tabla de transformadas de Laplace (véase tabla 5.1) y el método de fracciones parciales; por lo general, una función $F(s)$ es de la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$$

Por lo consiguiente, se factoriza el polinomio $M(s)$:

$$M(s) = (s + p_1)(s + p_2) \ldots (s + p_n)$$

Donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las raíces del polinomio, las cuales pueden ser reales o complejas.

Entonces, la función $F(s)$ se puede escribir como:

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{A_1}{(s-p_1)} + \frac{A_2}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s-p_i)}$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{A_1}{(s-p_1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{A_2}{(s-p_2)}\right] + \ldots + L^{-1}\left[\frac{A_n}{(s-p_n)}\right] = \sum_{i=1}^{n} L^{-1}\left[\frac{A_i}{(s-p_i)}\right]$$

Por tanto, la antitransformada de Laplace es:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i L^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_i)}\right] = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-p_i t}$$

Donde $-p_i$ es el polo y A_i es el residuo del polo $-p_i$.

De esta forma, la manera de calcular el valor de cada residuo A_i es la siguiente:

$$A_i = (s + p_i)F(s)|_{s=-p_i}$$

Problema resuelto

Determinar $f(t)$ si $L\{f(t)\} = \frac{s+5}{s^2+2s+5}$.

Solución

En este caso, completamos al cuadrado el denominador:

$$s^2 + 2s + 5 = s^2 + 2s + 1 + 4 = (s+1)^2 + 4$$

$$L\{f(t)\} = \frac{s+1+4}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{4}{(s+1)^2+4}$$

$\Rightarrow$

$$f(t) = e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\,\text{sen}\,2t = e^{-t}(\cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t)$$

Problema resuelto

Determinar $f(t)$ si $L\{f(t)\} = \frac{1}{s(s-4)}$.

Solución

Primero, determinamos las fracciones parciales del denominador:

$$\frac{1}{s(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} = \frac{A(s-4)+Bs}{s(s-4)} = \frac{(A+B)s-4A}{s(s-4)}$$

$\Rightarrow$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$-4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \text{ y } B = \frac{1}{4}$$

Así pues:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s(s-4)} = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s-4)}$$

Entonces:

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$$

Problema resuelto

Determinar $f(t)$, si $L\{f(t)\} = \dfrac{s+3}{s(s+2)(s+5)}$.

Solución

Puesto que en este caso el denominador ya está factorizado, el siguiente paso es determinar las fracciones parciales; de esta forma, simplemente calculamos los residuos con:

$$A_i = (s+p_i)F(s)|_{s=-p_i}$$

Así, tenemos 3 p_i, a saber $p_i = 0$, $p_i = 2$, $p_i = 5$.

$$A_i = (s+p_i)\frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=-p_i}$$

$$A_0 = (s)\frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=0} = \frac{0+3}{(0+2)(0+5)} = \frac{3}{10}$$

$$A_{-2} = (s+2)\frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2(-2+5)} = -\frac{1}{6}$$

$$A_{-5} = (s+5)\frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=-5} = \frac{-5+3}{-5(-5+2)} = -\frac{2}{15}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+5)} = \frac{3}{10s} - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{2}{15(s+5)}$$

Entonces:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{10s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{6(s+2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{15(s+5)}\right\}$$

$$f(t) = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t}$$

Problema resuelto

Determinar $y = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+6s+11}\right\}$.

Solución

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+9+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$= \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{s^*}{s^{*2}+2}\right\}}_{s^*=s+3} - \underbrace{3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{*2}+2}\right\}}_{s^*=s+3} = e^{-3t}\ \cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}\ \operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

Factores complejos repetidos

Si a es complejo, entonces:

$$a = \alpha + i\beta \text{ y } \bar{a} = \alpha - i\beta$$

Por tanto:

$$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-\bar{a}} + W(s)$$

Donde los coeficientes de G y H son reales, y:

$$y = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\} = Ae^{at} + Be^{\bar{a}t} + L^{-1}\{W(s)\}$$

Como:

$$e^{at} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i\operatorname{sen} \beta t)$$

$$e^{\bar{a}t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i\operatorname{sen} \beta t)$$

$$y = Ae^{\alpha t}(\cos \beta t + i\operatorname{sen} \beta t) + Be^{\alpha t}(\cos \beta t - i\operatorname{sen} \beta t) + L^{-1}\{W(s)\}$$

$$y = e^{\alpha t}((A+B)\cos \beta t + i(A-B)\operatorname{sen} \beta t) + L^{-1}\{W(s)\}$$

Entonces:

$$A = Q(a) = Q(\alpha + i\beta) = Q_1 + iQ_2$$

Y

$$B = Q(\bar{a}) = Q(\alpha - i\beta) = Q_1 - iQ_2$$

Luego, sumando y restando las dos ecuaciones:

$$A + B = 2Q_1$$

$$A - B = 2iQ_2 \Rightarrow i(A - B) = -2Q_2$$

Por último, sustituyendo estas nuevas constantes:

$$y = 2^{\alpha t}(Q_1 \cos \beta t - Q_2 \operatorname{sen} \beta t) + L^{-1}\{W(s)\}$$

Problema resuelto

Determinar $L^{-1}\left(\dfrac{10s^2 + 15s - 5}{s^3 + 2s^2 + 5s}\right)$.

Solución

Primero, factorizamos el denominador:

$$L^{-1}\left(\frac{10s^2+15s-5}{s^3+2s^2+5s}\right) = L^{-1}\left(\frac{10s^2+15s-5}{s(s^2+2s+5)}\right) = L^{-1}\left(\frac{10s^2+15s-5}{s(s+1+2i)(s+1-2i)}\right)$$

De esta forma, la factorización en fracciones parciales es:

$$L^{-1}\left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_{-1-2i}}{(s+1+2i)} + \frac{A_{-1+2i}}{(s+1-2i)}\right)$$

Luego, calculamos los residuos con $A_i = (s + p_i)F(s)|_{s=-p_i}$:

$$A_0 = \cancel{(s)}\left.\frac{10s^2+15s-5}{\cancel{s}(s^2+2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{-5}{(5)} = -1$$

$$A_{1+2i} = \cancel{(s+1+2i)}\left.\frac{10s^2+15s-5}{s\,\cancel{(s+1+2i)}\,(s+1-2i)}\right|_{s=-1-2i} = \frac{10(-1-2i)^2+15(-1-2i)-5}{(-1-2i)(-1-2i+1-2i)} = \frac{11}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$A_{1-2i} = \cancel{(s+1-2i)}\left.\frac{10s^2+15s-5}{s(s+1+2i)\,\cancel{(s+1-2i)}}\right|_{s=-1+2i} = \frac{10(-1+2i)^2+15(-1+2i)-5}{(-1+2i)(-1+2i+1+2i)} = \frac{11}{2}-\frac{3}{2}i$$

Entonces:

$$L^{-1}\left(\frac{-1}{s} + \frac{\frac{11}{2}+\frac{3}{2}i}{(s+1+2i)} + \frac{\frac{11}{2}-\frac{3}{2}i}{(s+1-2i)}\right)$$

En este caso:

$$Q_1 = \frac{11}{2},\; Q_2 = \frac{3}{2},\; \alpha = -1,\; \beta = -2$$

Por último, sustituyendo estas nuevas constantes:

$$y = 2e^{-t}\left(\frac{11}{2}\cos\,2t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\,(-2t)\right) - L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$y(t) = e^{-t}(11\,\cos\,2t + 3\,\text{sen}\,2t) - 1$$

Traslación de una función

Supóngase que se requiere obtener la transformada de Laplace de una función trasladada: $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$, donde $\alpha \geq 0$; por tanto, esta función es cero para $t < \alpha$.

Por definición, la transformada de Laplace de $f(t-\alpha)(t-\alpha)$ es $L[f(t-\alpha)1(t-\alpha) = \int_0^\infty f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st}\,dt$. Cambiando la variable independiente de t a τ, donde $\tau = t - \alpha$, se obtiene:

$$\int_0^\infty f(t-\alpha)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-st}e^{-\alpha s}d\tau = e^{\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-st}d\tau = e^{\alpha s}F(s)$$

Donde $F(s) = L[f(t)] = \oint_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$, y entonces:

$$L[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e{-}\alpha sF(s) \text{ con } \alpha \geq 0$$

Multiplicación de $f(s)$

Si la función $f(t)$ es transformable por Laplace, y esa transformada es $F(s)$, es posible obtener la transformada de $e^{-\alpha t}f(t)$ del siguiente modo:

$$L\left[e^{-\alpha t}f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}\,dt = F(s+\alpha)$$

Como se puede ver, la multiplicación de $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$ tiene el efecto de reemplazar s por $(s+\alpha)$ en la transformada de Laplace. Inversamente, reemplazar s por $(s+\alpha)$ es equivalente a multiplicar $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$; en este caso, α puede ser real o compleja.

La relación dada es útil para hallar la transformada de Laplace en funciones como $e^{-\alpha t}$ sen ωt y $e^{-\alpha t}$ cos ωt.

Teorema de la derivada

La transformada de Laplace de la derivada enésima de una función $f(t)$ está dada por:

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n.1}f(0) - s^{n-2}f(0) - .... - sf(0) - f(0)$$

Teorema de integración real

Si $f(t)$ es de orden exponencial, entonces existe la transformada de $f(t)$ y está dada por:

$$L\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

Donde $F(s) = L[f(t)]$ y $f^{-1}(0) = \int f(t)dt$ evaluada en $t = 0$. Como se puede ver, la integración en el dominio del tiempo se convierte en división en el dominio de s. Así, si el valor inicial de la integral es cero, la transformada de Laplace de la integral de $f(t)$ está dada por $F(s)/s$.

El teorema de integración real dado por la ecuación se puede modificar levemente, para afrontar el caso de la integral definida de $f(t)$. Si $f(t)$ es de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace de la integral $\int_0^t f(t)$ es:

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Donde $F(s) = L[f(t)]$.

Este teorema también se denomina de integración real.

Teorema de derivación compleja

Si $f(t)$ es transformable por Laplace, entonces, excepto en los polos de $F(s)$, $L\left[tf(t)\right] = \frac{d}{ds}F(s)$ donde $F(s) = L[f(t)]$.

Esto se denomina teorema de derivación compleja. También $L\left[t^2f(t)\right] = -\frac{d^2}{ds^2}F(s)$ en general, $L\left[t^nf(t)\right] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$ con ($n = 1, 2, 3, ...$).

Integración de convolución

Considérese la transformada de Laplace de:

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Con frecuencia, esta integral se expresa como $f_1(t) * f_2(t)$; a esta operación matemática se le denomina convolución.

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = -\int_t^0 f_1(\xi)f_2(t-\xi)\,d\xi = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Por tanto,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = f_2(t) * f_1(t)$$

Si $f_2(t)$ y $f_2(t)$ son continuas por segmentos y de orden exponencial, la transformada de Laplace de:

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Se puede obtener como:

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$$

Donde:

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\,dt = L[f_1(t)] \qquad F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\,dt = L[f_2(t)]$$

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau)1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

Problema resuelto

Determinar $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}\right\}$.

Solución

Usando el teorema de convolución:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\} = L(e^{2t}e^{3t}) = \int_0^t e^{2\tau}e^{3(t-\tau)}d\tau = e^{3t} - e^{2t}$$

Transformada inversa de Laplace con wxMaxima 11.04.0

Para obtener la transformada de Laplace usando wxMaxima 11.04.0 se utiliza el comando ilt (expresión, s, t).

Problema resuelto

Determinar con wxMaxima 11.04.0 $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2-6s+34}\right\}$.

Solución

En wxMaxima 11.04.0 se teclea:

```
-->    ilt((s-3)/(s^2-6*s+34),s,t);
```

Entonces, wxMaxima 11.04.0 nos devuelve:

```
(%i8)  ilt((s-3)/(s^2-6*s+34),s,t);

(%o8)  %e^3t cos(5 t)
```

Transformada de una función periódica

Sea $f\,[0,\infty) \to R$ una función continua en partes y de orden exponencial en el intervalo $[0,\infty)$; si la función es periódica, con periodo T, entonces:

$$L(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

Demostración:

Para su demostración usamos la definición:

$$L(f(t)) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \underbrace{\int_T^{2T} e^{-st}f(t)\,dt}_{t=2T+u} + \underbrace{\int_{2T}^{3T} e^{-st}f(t)\,dt}_{t=3T+u} + \ldots + \underbrace{\int_{(n-1)T}^{nT} e^{-st}f(t)\,dt}_{t=nT+u}$$

$$L(f(t)) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \underbrace{\int_0^T e^{-s(u+T)}f\left(u+T\right)dt}_{f(u+T)=f(u)} + \ldots + \underbrace{\int_0^T e^{-s(u+T)}f(u+nT)\,dt}_{f(u+nT)=f(u)}$$

$$L(f(t)) = (1+e^{-sT}+e^{-2sT}+e^{-3sT}+\ldots)\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{sT}}$$

Problema resuelto

Determinar la transformada de Laplace de la función diente de sierra que se muestra en la figura 5.8.

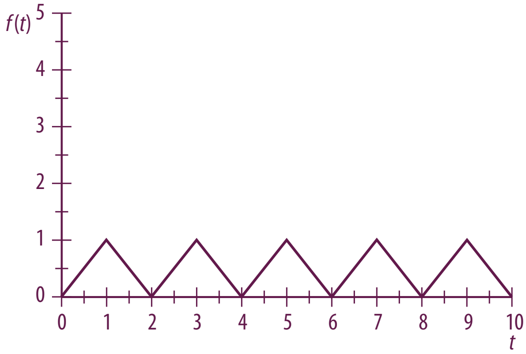


Figura 5.8

Solución

La función está dada por:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} & 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{si} & 1 < t < 2 \\ t-2 & \text{si} & 2 < t < 3 \\ 4-t & \text{si} & 3 < t < 4 \\ t-4 & \text{si} & 4 < t < 5 \\ 6-t & \text{si} & 5 < t < 6 \\ t-6 & \text{si} & 6 < t < 7 \\ 8-t & \text{si} & 7 < t < 8 \\ t-8 & \text{si} & 8 < t < 9 \\ 10-t & \text{si} & 9 < t < 10 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

Por tanto, el periodo de esta función es $T = 2$ y su transformada está dada por:

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{sT}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{2s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \cancel{\frac{e^{-s}}{s}} + \cancel{\frac{e^{-s}}{s}} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{2s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right)$$

5.5 Solución de ecuaciones diferenciales

Ahora, utilizaremos el método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.

El método de la transformada de Laplace ofrece la solución completa (esto es, la solución particular más la solución complementaria) de las ecuaciones diferenciales ordinarias invariantes en el tiempo. Los métodos clásicos para determinar la solución completa de una ecuación diferencial requieren evaluar las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales. En el caso de la transformada de Laplace, no es necesario calcular las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales, ya que estas quedan incluidas automáticamente en la transformada de Laplace de la ecuación diferencial.

Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se obtiene sustituyendo simplemente d/dt por s y $\frac{d^2}{dt^2}$ por s^2, etcétera.

En el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo por el método de la transformada de Laplace, se deben efectuar los dos pasos siguientes:

1. En una ecuación diferencial dada, al tomar la transformada de Laplace de cada término, la ecuación diferencial se convierte en una ecuación algebraica en s, y reordenando la ecuación algebraica se obtiene la expresión de la transformada de Laplace de la variable dependiente.
2. La solución temporal de la ecuación diferencial se obtiene determinando la transformada inversa de Laplace de la variable dependiente.

Problema resuelto

Resolver el problema de valor inicial:

$$y' + y = 0,\ y(0) = 1$$

Solución

La transformada de y' es:

$$L\{y'\} = sy(s) - y(0)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$sy(s) - y(0) - y(s) = 0$$

$$(s-1)y(s) = y(0) = 1$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{-t}$$

Por tanto, la solución es:

$$y(t) = e^{-t}$$

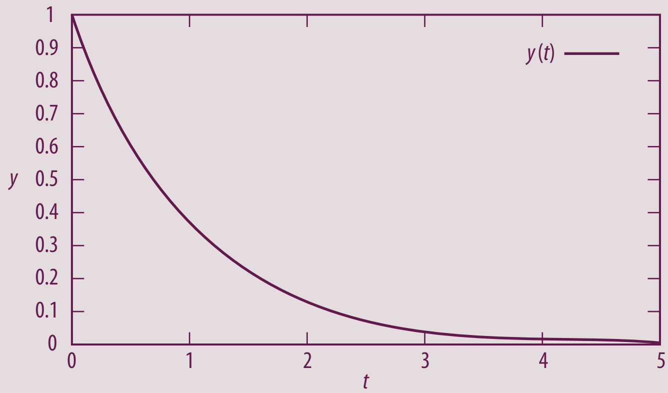


Figura 5.9

Problema resuelto

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 4y = 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Solución

La transformada de y'' es:

$$L\{y''\} = s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$s^2 y(s) - sy(0) - y'(0) - 4y(s) = \frac{2}{s}$$

$$s^2 y(s) - 4y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 - 4)y(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{2}{s(s^2 - 4)}$$

Determinando las fracciones parciales para obtener la transformada inversa:

$$\frac{2}{s(s^2-4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + d}{(s^2-4)} = \frac{A(s^2-4) + (Bs+d)s}{s(s^2-4)} = \frac{(A+B)s^2 - 4A + ds}{s(s^2-4)}$$

$\Rightarrow$

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$-4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$d = 0$

$$\frac{2}{s(s^2-4)} = -\frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2-4)}$$

Entonces:

$$y(y) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2-4)}\right\} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\cosh 2t\right)$$

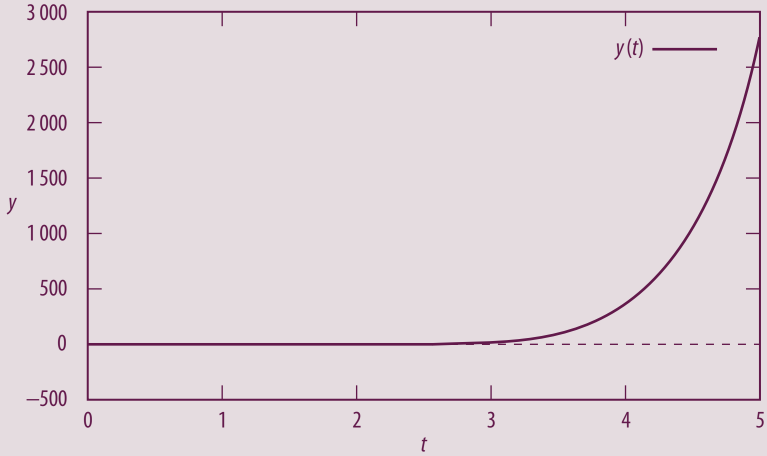


Figura 5.10

Problema resuelto

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 4y' + 5y = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Solución

Tomando transformadas de Laplace:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 5Y(s) = \frac{1}{s}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

Por otra parte:

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2 - i)(s + 2 + i)$$

Para $s = 2 \pm i = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \alpha = -2$ y $\beta = 1$ calculamos los residuos con $A_i = (s + p_i)F(s)|_{s=-p_i}$:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

$$A_0 = (s)\left.\frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}\right|_{s=0} = \frac{1}{5}$$

$$A_{-2+i} = \cancel{(s+2-i)}\left.\frac{1}{s\,\cancel{(s+2-i)}\,(s+2+i)}\right|_{s=-2+i} = \frac{1}{(-2+i)(-2+i+2+i)} = \frac{1}{(-2+i)(2i)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$$

$$A_{-2-i} = \cancel{(s+2+i)}\left.\frac{1}{s\,\cancel{(s+2+i)}\,(s+2-i)}\right|_{s=-2-i} = \frac{1}{(-2-i)(-2-i+2-i)} = \frac{1}{(-2-i)(-2i)} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$$

Por tanto:

$$y = \frac{1}{5} + 2e^{-2t}\left(-\frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right)$$

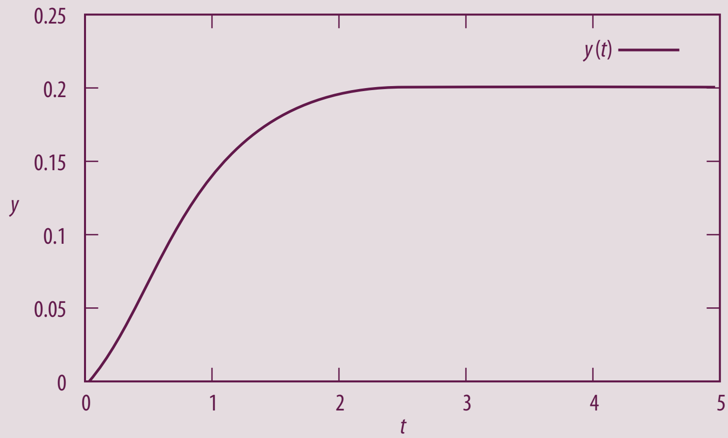


Figura 5.11

Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales por el método de la transformada de Laplace

Cuando en un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes se especifican condiciones iniciales, es posible aplicar la transformada de Laplace a cada ecuación y, con esto, obtener un sistema de ecuaciones algebraicas.

Problema resuelto

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned} \qquad \text{sujeto a } x(0) = 1 \text{ , } y(0) = 0.$$

Solución

Primero, tomamos la transformada de Laplace de cada una de las dos ecuaciones:

$$L(2x' + y' - y) = L(t)$$
$$L(x' + y') = L(t^2)$$

$$2sL(x) - 2x\,(0) + sL(y) - y(0) - L(y) = \frac{1}{s^2}$$

$$sL(x) - x(0) + sL(y) - y(0) = \frac{2}{s^3}$$

Luego, volvemos a arreglar la primera ecuación y sustituimos las condiciones iniciales:

$$2sL(x) + sL(y) - L(y) = \frac{1}{s^2} + 2\underbrace{x\,(0)}_{=1} + \underbrace{y(0)}_{=0}$$

$$2sL(x) + (s-1)L(y) = \frac{1}{s^2} + 2$$

Ahora, volvemos a arreglar la segunda ecuación y sustituimos las condiciones iniciales:

$$sL(x) + sL(y) = \underbrace{x(0)}_{=1} + \underbrace{y(0)}_{=0} + \frac{2}{s^3}$$

$$sL(x) + s\,L(y) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

Entonces, multiplicando esta ecuación por (–2):

$$-2sL(x) - 2\,s\,L(y) = -2 - \frac{4}{s^3}$$

Después, la sumamos a la ecuación:

$$2sL(x) + (s-1)L(y) = \frac{1}{s^2} + 2$$

$$\cancel{-2sL(x)} - 2s\,L(y) + \cancel{2sL(x)} + (s-1)L(y) = \frac{1}{s^2} + 2 - 2 - \frac{4}{s^3}$$

$$-2sL(y) + (s-1)L(y) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$[-2s + (s-1)]L(y) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$[-s-1]L(y) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3} \Rightarrow L(y) = \frac{4-s}{(s+1)s^3}$$

Y tomamos fracciones parciales:

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1}$$

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

Entonces:

$$y(t) = 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Por tanto, la solución es:

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}$$

Aplicando este resultado en la ecuación:

$$sL(x) + s\,L(y) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

$$sL(x) + \frac{4-s}{s^2(s+1)} = 1 + \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow L(x) = -\frac{4-s}{s^3(s+1)} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

Tomando la transformada inversa:

$$x(t) = -y\,(t) + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} = -5 + 5t - 2t^2 + 5\,e^{-t} + 1 + \frac{2}{3!}t^3$$

Entonces:

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} + 5\,e^{-t}$$

Por tanto, la solución del sistema dado es:

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{t^3}{3} + 5\,e^{-t}$$

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5\,e^{-t}$$

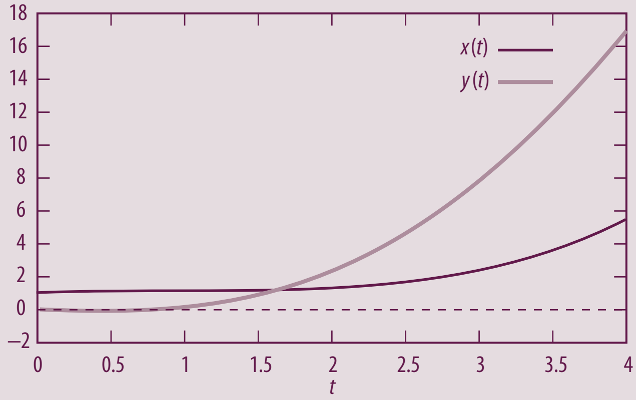


Figura 5.12

Comprobación

$$x' + y' = (t^2 - 5e^{-t} - 4t + 5) + (4t + 5e^{-t} - 5) = t^2$$

$$2x' + y' - y = 2(t^2 - 5e^{-t} - 4t + 5) + (4t + 5e^{-t} - 5) - (2t^2 - 5e^{-t} - 5t + 5) = t$$

Problema resuelto

Resolver el sistema del problema resuelto anterior usando wxMaxima 11.04.0:

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned} \qquad \text{sujeto a } x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Solución

Para resolver el sistema usando el CAS tecleamos el siguiente comando:

```
--> atvalue(x(t),t=0,1);
    atvalue(y(t),t=0,0);
```

con el fin de dar de alta los valores iniciales.

Ahora, para resolver el sistema tecleamos:

```
--> desolve([2*'diff(x(t),t)+'diff(y(t),t)-y(t)=t,'diff(x(t),t)+'diff(y(t),t)=t^2],[x(t),y(t)]);
```

Entonces wxMaxima 11.04.0 nos devuelve:

```
(%i6) desolve([2*'diff(x(t),t)+'diff(y(t),t)-y(t)=t,'diff(x(t),t)+'diff(y(t),t)=t^2],[x(t),y(t)]);
```

$$\text{(\%o6)}\quad [x(t)=5\ \%e^{-t}+\frac{t^3}{3}-2t^2+5t-4,\ y(t)=-5\%e^{-t}+2t^2-5t+5]$$

Que es el resultado que obtuvimos en el problema anterior.

5.6 Aplicaciones

Circuitos eléctricos

A continuación se presenta un problema resuelto relacionado con circuitos eléctricos.

Problema resuelto

Un circuito RLC en serie tiene una fuente de voltaje dada por $V(t) = \text{sen } 100t$ V, un resistor de 0.02 Ω, un inductor de 0.001 H y un capacitor de 2 F; si la corriente y la carga iniciales en el capacitor son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t > 0$.

Solución

La ecuación para la corriente es:

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

$$(0.02)\frac{dI}{dt} + (0.001)\frac{d^2I}{dt^2} + 0.5I = 100\ \cos 100t$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{(0.02)}{(0.001)}\frac{dI}{dt} + \frac{0.5I}{(0.001)} = \frac{100\ \cos 100t}{(0.001)}$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 500I = 100\,000\ \cos 100t$$

Y las condiciones iniciales son: $I(0) = 0$ y $I'(0) = 0$.

Primero, resolvemos la ecuación $\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 500I = 100\,000 \cos 100t$ usando transformadas de Laplace:

$$s^2I(s) - \cancel{sI(0)} - \cancel{I'(0)} + 20sI(s) - \cancel{20I(0)} + 500I(s) = 100\,000\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right)$$

$$s^2I(s) + 20sI(s) + 500I(s) = 100\,000\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right)$$

$$(s^2+20s+500)I(s) = 100\,000\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right)$$

$$I(s) = \frac{100\,000}{(s^2+20s+500)}\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right)$$

$$I(s) = \frac{100\,000}{(s^2+20s+500)}\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right)$$

$$s^2+20s+500 = s^2+20s+100+400 = (s+10)^2+400$$

$$I(s) = \frac{100\,000}{((s+10)^2+400)}\left(\frac{s}{s^2+100^2}\right) = \frac{As+B}{(s+10)^2+400} + \frac{Cs+D}{s^2+100^2}$$

Entonces:

$$(As+B)(s^2+100^2)+(Cs+D)((s+10)^2+400) = 100\,000s$$
$$\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+20C+D=0 \\ 10\,000A+500C+20D=100\,000 \\ 10\,000B+500D=0 \end{array}\right\} A=\frac{3\,800}{377},\ B=-\frac{4\,000}{377},\ C=\frac{-3\,800}{377},\ D=\frac{80\,000}{377}$$

De esta forma:

$$I(s) = \frac{\frac{3\,800}{377}s-\frac{4\,000}{377}}{(s+10)^2+400} + \frac{\frac{-3\,800}{377}s+\frac{80\,000}{377}}{s^2+100^2}$$

$$I_1(s) = \frac{\frac{3\,800}{377}s-\frac{4\,000}{377}}{(s+10)^2+400} = \frac{3\,800}{377}\left(\frac{s-\frac{20}{19}}{(s+10)^2+400}\right)$$

$$I_1(s) = \frac{3\,800}{377}\left(\frac{s+10-10-\frac{20}{19}}{(s+10)^2+400}\right)$$

$$I_1(s) = \frac{3\,800}{377}\left(\frac{s+10}{(s+10)^2+400} + \frac{-\frac{210}{19}}{(s+10)^2+400}\right)$$

$$I_1(s) = \frac{3\,800}{377}\left(\frac{s+10}{(s+10)^2+400}\right) - \left(\frac{3\,800}{377}\right)\left(\frac{210}{19}\right)\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{20}{(s+10)^2+400}\right)$$

$$I_1(s) = \frac{3\,800}{377}\left(\frac{s+10}{(s+10)^2+400}\right) - \frac{2100}{377}\left(\frac{20}{(s+10)^2+400}\right)$$

$$I_1(t) = \frac{3\,800}{377}L^{-1}\left\{\frac{s+10}{(s+10)^2+400}\right\} - \frac{2100}{377}L^{-1}\left\{\frac{20}{(s+10)^2+400}\right\}$$

$$I_1(t) = \frac{3\,800}{377}e^{-10t}\cos 20t - \frac{2100}{377}e^{-10t}\operatorname{sen} 20t$$

Ahora, analicemos:

$$I_2(s) = \frac{\frac{-3\,800}{377}s + \frac{80\,000}{377}}{s^2 + 100^2} = \frac{\frac{-3\,800}{377}s + \frac{80\,000}{377}}{(s-100i)(s+100i)}$$

$\Rightarrow$

$a = 100i = \alpha + i\beta \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 100$

$\bar{a} = -100i$

$$Q(s) = \frac{\frac{-3\,800}{377}s + \frac{80\,000}{377}}{(s+100i)}$$

$$Q(a) = Q(100i) = \frac{\frac{-3\,800}{377}(100i) + \frac{80\,000}{377}}{((100i) + 100i)} = -\frac{1900}{377} - \frac{400}{377}i = Q_1 + iQ_2$$

$$Q_1 = -\frac{1900}{377} \ \text{ y } \ Q_2 = -\frac{400}{377}$$

$$I_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{-3800}{377}s + \frac{80000}{377}}{s^2 + 100^2}\right\} = 2e^{\alpha t}(Q_1 \cos\beta t - Q_2 \operatorname{sen}\beta t)$$

Entonces:

$$I_2(t) = 2e^{0t}\left(-\frac{1900}{377}\cos 100t + \frac{400}{377}\operatorname{sen}100t\right) = -\frac{3800}{377}\cos 100t + \frac{800}{377}\operatorname{sen}100t$$

Por tanto, la solución es:

$$I(t) = \frac{3800}{377}e^{-10t}\cos 20t - \frac{2100}{377}e^{-10t}\operatorname{sen}20t - \frac{3800}{377}\cos 100t + \frac{800}{377}\operatorname{sen}100t$$

Sistemas acoplados masa-resorte

Problema resuelto

En una superficie horizontal suave, una masa, $m_1 = 2$ kg, está unida a una pared fija mediante un resorte con constante de resorte $k_1 = 4\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$ por su parte, otra masa, $m_2 = 1$ kg, está unida al primer objeto mediante un resorte con constante de resorte $k_2 = 2\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$ Los objetos están alineados en forma horizontal, de modo que los resortes tengan su longitud natural (véase figura 5.13). Si ambos objetos se desplazan 3 metros a la derecha de sus posiciones de equilibrio y luego se liberan, ¿cuáles son las ecuaciones de movimiento de los dos objetos?

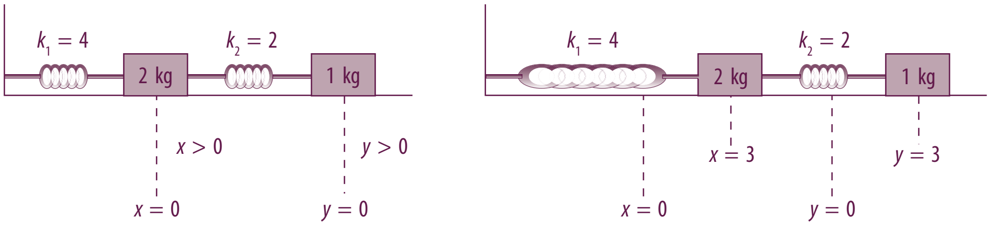


Figura 5.13

Solución

En este caso, las únicas fuerzas que se consideran son las fuerzas inherentes a los propios resortes; pues, como se recordará, la ley de Hooke afirma que la fuerza que actúa sobre un objeto debido a un resorte tiene una magnitud proporcional al desplazamiento del resorte a partir de su longitud natural y tiene dirección opuesta a su desplazamiento. Es decir, si el resorte se estira o se comprime, entonces este trata de regresar a su longitud natural.

Como cada masa se puede mover con libertad, aplicamos la segunda ley de Newton a cada objeto. Así, sea $x(t)$ el desplazamiento (hacia la derecha) de la masa de 2 kg, a partir de su posición de equilibrio y, de manera análoga, sea $y(t)$ el desplazamiento correspondiente para la masa de 1 kg. La masa de 2 kg tiene una fuerza F, la cual actúa por su lado izquierdo, debido a un resorte, y una fuerza F_2 que actúa por su lado derecho, debido al segundo resorte. Al aplicar la ley de Hooke, vemos que:

$$F_1 = -k_1 x \qquad F_2 = k(y - x)$$

Porque $(y - x)$ es el desplazamiento neto del segundo resorte con respecto de su longitud natural. De esta forma, solo hay una fuerza que actúa sobre la masa de 1 kg: la fuerza debida al segundo resorte, que es:

$$F_3 = -k_2(y - x)$$

Así, al aplicar la segunda ley de Newton a estos objetos, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x}{dt^2} &= F_1 + F_2 = -k_1 x + k_2(y - x) \\ m_2 \frac{d^2y}{dt^2} &= F_3 = -k_2(y - x) \end{aligned} \qquad (5.1)$$

O

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x - k_2 y = 0$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} + k_2 y - k_2 x = 0$$

En este caso, debemos resolver el sistema:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x - 2y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y - 2x = 0$$

Con las condiciones iniciales, que son: $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Por tanto, la transformada de Laplace de cada ecuación es:

$$2(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + 6X(s) - 2Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2Y(s) - 2X(s) = 0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$2(s^2X(s) - 6s + 6X(s) - 2Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - 3s + 2Y(s) - 2X(s) = 0$$

$$(2s^2 + 6)X(s) - 2Y(s) = 6s$$

$$-2X(s) + (s^2 + 2)Y(s) = 3s$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2s^2+6) & -2 \\ -2 & (s^2+2) \end{vmatrix} = 2s^4 + 10s^2 + 8 = 2(s^4 + 5s^2 + 4) = 2(s^2+4)(s^2+1)$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 6s & -2 \\ 3s & (s^2+2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6s^3 + 18s}{2(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{3s^3 + 9s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} (2s^2+6) & 6s \\ -2 & 3s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6s^3 + 30s}{2(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{3s^3 + 15s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$X(s) = \frac{3s^3 + 9s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4) = 3s^3 + 9s$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 3 \\ B + D = 0 \\ A + 4C = 9 \\ B + 4D = 0 \end{array}\right\} A = 1,\ B = 0,\ C = 2,\ D = 0$$

Entonces:

$$X(s) = \frac{3s^3 + 9s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{s}{(s^2+4)} + \frac{2s}{(s^2+1)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)} + \frac{2s}{(s^2+1)}\right\} = \cos\ 2t + 2\ \cos\ t$$

$$Y(s) = \frac{3s^3 + 15s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4) = 3s^3 + 15s$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 3 \\ B + D = 0 \\ A + 4C = 15 \\ B + 4D = 0 \end{array}\right\} A = -1,\ B = 0,\ C = 4,\ D = 0$$

Por tanto:

$$Y(s) = \frac{3s^3 + 15s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{-s}{(s^2+4)} + \frac{4s}{(s^2+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{-s}{(s^2+4)} + \frac{4s}{(s^2+1)}\right\} = -\cos 2t + 4\ \cos t$$

Las ecuaciones diferenciales que describen las vibraciones mecánicas y los circuitos RLC en serie, esencialmente son iguales. De hecho, existe una identificación natural de los parámetros m, b, k para un sistema masa-resorte con los parámetros L, R y C que describen los circuitos (véase tabla 5.2).

Tabla 5.2 Analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos

Sistema mecánico masa-resorte con amortiguamiento	Circuito eléctrico RLC en serie
$mx'' + bx' + kx = f(t)$	$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = V(t)$
Desplazamiento x Velocidad x'	Carga q Corriente $i = q'$
Masa m	Inductancia L
Constante de amortiguamiento b	Resistencia R
Constante de resorte k	(Capacitancia)$^{-1}$ $\frac{1}{C}$
Fuerza externa $f(t)$	Fuente de voltaje $V(t)$

Problema resuelto

En el instante $t = 0$, la carga en el capacitor de la red eléctrica que aparece en la figura 5.14 es de 2 coulombs, mientras que la corriente que circula a través de este es cero. Determinar la carga en el capacitor y las corrientes en las diversas ramas de la red en cualquier instante $t > 0$.

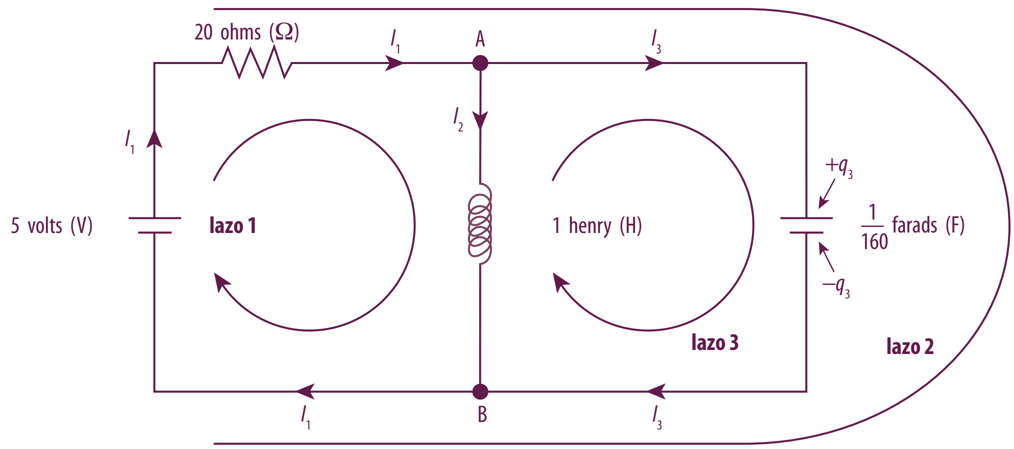


Figura 5.14

Solución

Para determinar la carga y las corrientes en la red eléctrica, en este caso, primero notamos que la red tiene tres circuitos cerrados:

1. El lazo 1 a través de la batería, el resistor y el inductor.
2. El lazo 2 que pasa por la batería, el resistor y el capacitor.
3. El lazo 3 que contiene al capacitor y al inductor.

De esta forma, aprovechamos la ley de la corriente de Kirchhoff y designamos a i_1 como la corriente que pasa por la batería y el resistor; a i_2 como la corriente que pasa por el inductor y a i_3 como la corriente que pasa por el capacitor. Para que la notación sea consistente, denotamos la carga en el capacitar como q_3.

Por tanto:

$$i_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

La caída de voltaje en un resistor es RI, en un inductor es $L\frac{di}{dt}$ y en un capacitor es $\frac{q}{C}$ Así, al aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff a la red eléctrica que se ilustra en la figura 5.14, se observa que para el lazo 1:

$$\frac{di_2}{dt} + 20i_1 = 5$$

Para el lazo 2:

$$20i_1 + 160q_3 = 5$$

$$\Rightarrow 20\frac{di_1}{dt} + 160\frac{dq_3}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -8\frac{dq_3}{dt}$$

Y para el lazo 3:

$$-\frac{di_2}{dt} + 160q_3 = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 160q_3$$

Ahora, si aplicamos la ley de la corriente de Kirchhoff a los dos puntos de unión en la red, en el punto A vemos que:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Mientras que en el punto B vemos que:

$$i_2 + i_3 - i_1 = 0 \Rightarrow i_3 = i_1 - i_2$$

$$\frac{dq_3}{dt} = i_1 - i_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} = \frac{di_1}{dt} - 160q_3 = -8\frac{dq_3}{dt} - 160q_3$$

Entonces, la ecuación a resolver es:

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} + 8\frac{dq_3}{dt} + 160q_3 = 0$$

Con las condiciones iniciales:

$$q_3(0) = 2,\ \frac{dq_3}{dt}(0) = 0$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$s^2Q_3(s) - sq_3(0) - q'_3(0) + 8(sQ_3(s) - q_3(0)) + 160\ Q_3(s) = 0$$

$$(s^2 + 8s + 160)Q_3(s) - 2s - 16 = 0$$

$$\Rightarrow Q_3(s) = \frac{2s + 16}{s^2 + 8s + 160}$$

Resolviendo:

$$s^2 + 8s + 160 = 0 \Rightarrow s = -4 \pm 12i = \alpha \pm i\beta$$

Por tanto:

$$Q_3(s) = \frac{2s+16}{(s-(-4+12i))(s-(-4-12i))}$$

Evaluando:

$$F_{Q_3}(s) = \frac{2(-4+12i)+16}{((-4+12i)-(-4-12i))} = 1 - \frac{1}{3}i$$

Entonces:

$$q_3(t) = 2e^{-4t}\left(\cos 12t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 12t\right)$$

Y

$$i_3(t) = \frac{dq_3(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2e^{-4t}\left(\cos 12t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 12t\right)\right] = -\frac{80}{3}e^{-4t}\ \operatorname{sen} 12t$$

Sustituyendo q_3 en la ecuación $20i_1 + 160\,q_3 = 5$, obtenemos:

$$20i_1 + 160q_3 = 5 \Rightarrow i_1 = \frac{5}{20} - \frac{160}{20}q_3$$

$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{1}{4} - 8(q_3(t)) = \frac{1}{4} - 16e^{-4t}\left(\cos 12t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 12t\right)$$

Y de la ecuación $i_2 + i_3 - i_1 = 0$:

$$i_2(t) = -i_3 + i_1 = \frac{80}{3}e^{-4t}\ \operatorname{sen} 12t + \frac{1}{4} - 16e^{-4t}\left(\cos 12t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 12t\right)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{4} - 16e^{-4t}\ \cos 12t + \frac{64}{3}e^{-4t}\ \operatorname{sen} 12t$$

Problema resuelto

Una llanta de masa m cuelga de un resorte. Una vez conseguido el punto de equilibrio, se suelta la llanta con una velocidad inicial v_0 a una distancia x_0 debajo de la posición de equilibrio y simultáneamente se le aplica una fuerza externa $F(t)$ dirigida hacia abajo (véase figura 5.15). Encontrar la ecuación de movimiento.

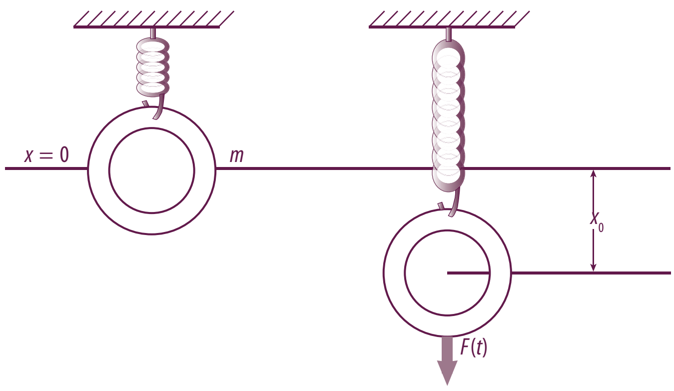


Figura 5.15

Solución

En este caso, la dirección hacia abajo del eje x se toma como positiva y se tiene en cuenta la fricción del aire (resistencia proporcional a la velocidad de la masa).

En cualquier tiempo t, hay tres fuerzas que actúan en el sistema:

1. $F(t)$ es la fuerza externa medida en el sentido positivo.
2. $F_r = -kx$, $k > 0$ es la fuerza de reinstalación en el resorte (ley de Hooke).
3. $F_b = -bx'$, $b > 0$ es la fuerza debida a la resistencia del aire. Esta fuerza siempre actúa en dirección opuesta a la velocidad; por esa razón, tiende a retardar el movimiento de la masa.

Por su parte, F_r y F_b son negativas, porque van en sentido opuesto al eje x considerado. Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta que actúa sobre la masa es: $F = $ (masa) (aceleración).

Entonces:

$F = F_r + F_b + F(t)$ es la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre la masa m.

De esta forma, aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = ma$$

$$mx'' = -kx - bx' + F(t)$$

Las condiciones iniciales son: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

Un resorte cuelga verticalmente; su extremo superior está fijo y del extremo inferior pende una caja que pesa 196 N. Una vez en equilibrio, se tira de la caja haciéndola desplazar 25 cm y se suelta, sabiendo que $k = 80\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y que hay una resistencia del aire proporcional a 5 v.

De los datos tenemos que:

$$mg = 196\text{ N} \Rightarrow m = \frac{196\text{ N}}{9.8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20\ \text{kg}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0.25 \times 10^{-2}$ m y $v(0) = 0$.

$$mx'' = -kx - bx' + F(t)$$

$$(20\ \text{kg})x'' = -\left(80\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x - 5x'$$

$$(20)x'' + 5x' + (80)x = 0$$

Por tanto, la ecuación a resolver es:

$$x'' + \frac{1}{4}x' + 4x = 0$$

Con las condiciones iniciales: $x(0) = 0.25$ m y $x'(0) = 0$.

Ahora, tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + \frac{1}{4}(sX(s) - x(0)) + 4X(s) = 0$$

Sustituimos las condiciones iniciales:

$$s^2X(s) - s\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(sX(s) - \frac{1}{4}\right) + 4X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{s}{4} + 4\right)X(s) = \frac{s}{4} + \frac{1}{16}$$

$$X(s) = \frac{\frac{s}{4} + \frac{1}{16}}{\left(s^2 + \frac{s}{4} + 4\right)}$$

Por otra parte, resolviendo $\left(s^2+\frac{s}{4}+4\right)=0$ se obtiene: $s=-.125\pm 1.996i=\alpha\pm i\beta$

$$X(s)=\frac{\frac{s}{4}+\frac{1}{16}}{(s-(-.125+1.996i))(s-(-.125-1.996i))}$$

Entonces, calculamos los residuos con $A_i=(s+p_i)F(s)|_{s=-p_i}$:

$$X_{-.125+1.996i}=\cancel{(s-(-.125+1.996i))}\left.\frac{\frac{s}{4}+\frac{1}{16}}{\cancel{(s-(-.125+1.996i))}(s-(-.125-1.996i))}\right|_{s=-.125+1.996i}$$

$$X_{-.125+1.996i}=\frac{\frac{-.125+1.996i}{4}+\frac{1}{16}}{(-.125+1.996i-(-.125-1.996i))}=\frac{\frac{-.125+1.996i}{4}+\frac{1}{16}}{(2(1.996i))}=0.125-7.\ 8282\times 10^{-3}i$$

$Q(-.125+1.996i)=.125-.0078278i$

De esta forma:

$$X(t)=2e^{-0.125t}((.125)\cos 1.996t+(.0078278)\operatorname{sen} 1.996t)$$

Problema resuelto

Un circuito RLC en serie tiene una fuente de voltaje dada por $V(t)=\operatorname{sen} 100t$ V, un resistor de 0.02 Ω, un inductor de 0.01 H y un capacitor de 2 F. Si la corriente y la carga iniciales en el capacitor son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t>0$.

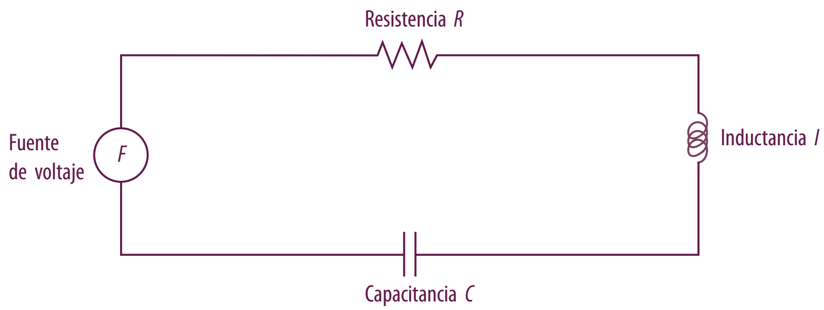


Figura 5.16

Solución

$$Lq''+Rq'+\frac{q}{C}=V(t)$$

$$.01q''+.02q'+\frac{q}{2}=\operatorname{sen}100t$$

$$.01q''+.02q'+\frac{q}{2}=\operatorname{sen}100t$$

$$q''+2q'+50q=100\ \operatorname{sen}100t$$

$$s^2Q(s)+sq(0)+q'(0)+2(sQ(s)+q(0))+50Q(s)=100\left(\frac{100}{s^2+(100)^2}\right)$$

Sustituimos las condiciones iniciales:

$$s^2Q(s)+2sQ(s)+50Q(s)=100\left(\frac{100}{s^2+(100)^2}\right)$$

$$s^2Q(s)+2sQ(s)+50Q(s)=100\left(\frac{100}{s^2+(100)^2}\right)$$

$$(s^2+2s+50)Q(s)=100\left(\frac{100}{s^2+(100)^2}\right)$$

$$Q(s)=\frac{(100)^2}{(s^2+(100)^2)(s^2+2s+50)}$$

$$s^2+(100)^2=(s-100i)(s+100i)$$

$$s^2+2s+50=(s-(-1+7i))(s-(-1-7i))$$

$$Q(s)=\frac{(100)^2}{(s-100i)(s+100i)(s-(-1+7i))(s-(-1-7i))}$$

Ahora, calculamos los residuos:

$$Q_{100i}=\cancel{(s-100i)}\left.\frac{(100)^2}{\cancel{(s-100i)}(s+100i)(s-(-1+7i))(s-(-1-7i))}\right|_{s=100_i}$$

$$Q_{100i}=\frac{(100)^2}{(100i+100i)(100i-(-1+7i))(100i-(-1-7i))}$$

$$Q_{100i}=-1.0097\times10^{-4}+5.\ 0231\times10^{-6}i$$

$$\alpha=0,\ \beta=100$$

$$q_1(t)=2e^{\alpha t}(P_R\cos\beta t-P_i\operatorname{sen}\beta t)$$

$$q_1(t)=2(-1.0097\times10^{-4}\cos 100t-5.0231\times10^{-3}\operatorname{sen}100t)$$

$$Q_{-1+7i}=\cancel{(s-(-1-7i))}\left.\frac{(100)^2}{(s-100i)(s+100i)\cancel{(s-(-1-7i))}(s-(-1+7i))}\right|_{s=(-1-7i)}$$

$$Q_{-1+7i}=\frac{(100)^2}{(-1-7i-100i)(-1-7i+100i)(-1-7i-(-1+7i))}$$

$$Q_{-1+7i}=\ 1.\ 0097\times10^{-4}+7.\ 1773\times10^{-2}i$$

$$\alpha=-1,\ \beta=-7$$

$$q_2(t)=2e^{\alpha t}(P_R\cos\beta t-P_i\operatorname{sen}\beta t)$$

$$q_2(t)=2^{-t}(1.0097\times10^{-4}\cos(-7t)-7.1773\times10^{-2}\operatorname{sen}(-7t))$$

$$q_2(t)=2e^{-t}(1.0097\times10^{-4}\cos 7t+7.1773\times10^{-2}\operatorname{sen}7t)$$

Así, la solución es:

$$q(t)=2(-1.0097\times10^{-4}\cos 100t-5.0231\times10^{-3}\operatorname{sen}100t)$$
$$+\,2e^{-t}(1.0097\times10^{-4}\cos 7t+7.1773\times10^{-2}\operatorname{sen}7t)$$

UNIDAD 5

Problemas para resolver

5.1 Determina la transformada de Laplace de:

a) e^{3t}

b) $\cos at + \operatorname{sen} bt$

c) $8e^{t} + 5e^{2t}$

d) $25\, e^{wt}$

5.2 La función gamma se define mediante la integral $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ $\alpha > 0$, demuestra que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

5.3 Calcula $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.4 Usando la propiedad recursiva de la función gamma demostrada en el problema 5.2, calcula:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

5.5 Demuestra que $L(t^{\alpha}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$.

Sugerencia: Haz el cambio de variable $u = st$.

5.6 Demuestra las propiedades siguientes de la función gamma:

a) $\Gamma\,(1) = 1$.

b) $\Gamma\,(n + 1) = n!$ para todo $n \in N$

Sugerencia: Integra sucesivamente por partes.

5.7 Aplicando el resultado del problema 5.5, determina la transformada de Laplace de:

a) $t^{-1/2}$

b) $t^{1/2}$

c) $t^{3/2}$

d) $t^{5/2}$.

5.8 Determina la transformada inversa de Laplace de:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^3}$

b) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+2)^3}$

c) $F(s) = \dfrac{2}{(s+2)^3}$

d) $F(s) = \dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$

5.9 Determina la transformada inversa de Laplace de:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{48}{s^5}$

b) $F(s) = \dfrac{(s+1)^3}{s^4}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-2}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{4s+1}$

5.10 Usando el teorema de convolución, determina la transformada inversa de:

a) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$

b) $F(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s^2-4s+13)}$

5.11 Usando el teorema de traslación, determina la transformada de Laplace de: $\operatorname{sen}(2t)e^{3t}$.

En los problemas 5.12 a 5.25 escoge entre $F(s)$ o $f(t)$, según sea el caso:

5.12 $L(te^{10t})$

5.13 $L(te^{-6t})$

5.14 $L(t^3e^{-2t})$

5.15 $L(t^{10}e^{-7t})$

5.16 $L(e^{t}\operatorname{sen} 3t)$

5.17 $L(e^{-2t}\cos 4t)$

5.18 $L(e^{5t}\operatorname{senh} 3t)$

5.19 $L(e^{-t}\cosh 3t)$

5.20 $L(t(e^{t} + e^{2t})^2)$

5.21 $L(e^{2t}(t-1)^2)$

5.22 $L(e^{-t}\operatorname{sen}^2 t)$

5.23 $L(e^{3t}\cos^2 t)$

5.24 $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+2)^3}\right)$

5.25 $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-1)^4}\right)$

ALERTA: En los problemas 5.26 a 5.48 completa el cuadrado del denominador.

5.26 $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right)$

5.27 $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right)$

5.28 $L^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right)$

5.29 $L^{-1}\left(\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right)$

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

5.30 $L^{-1}\left(\dfrac{s}{(s+1)^2}\right)$

5.31 $L^{-1}\left(\dfrac{5s}{(s-2)^2}\right)$

5.32 $L^{-1}\left(\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)}\right)$

ALERTA: Recuérdese que $L(\delta_a) = e^{-as}$.

5.33 $L^{-1}\left(\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^2}\right)$

ALERTA: Recuérdese que

$$L\left[u_a(t)\right] = \frac{e^{-as}}{s}$$

5.34 $L((t-1)u(t-1))$

5.35 $L(e^{2-t}u(t-2))$

5.36 $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right)$

5.37 $L^{-1}\left(\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right)$

5.38 $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right)$

5.39 $L^{-1}\left(\dfrac{se^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+4}\right)$

5.40 $L^{-1}\left(\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right)$

5.41 $L(t\cos 2t)$

5.42 $L(t\,\mathrm{senh}\,3t)$

5.43 $L(t^2\,\mathrm{senh}\,t)$

5.44 $L(t^2\cos t)$

5.45 $L(te^{2t}\cos 6t)$

5.46 $L(te^{-3t}\cos 3t)$

5.47 $L^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right)$

5.48 $L^{-1}\left(\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)}\right)$

5.49 Demuestra el siguiente teorema:

Si $L(f(t)) = \phi(s)$, entonces $L(t^n f(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n\phi(s)}{ds^n}$.

En los problemas 5.50 a 5.54 usa el teorema que demostraste en el problema 5.49, en el caso

$$n = L(tf(t)) = (-1)\frac{d\phi(s)}{ds} \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{d\phi(s)}{ds}\right)$$

para calcular las transformadas inversas de Laplace que se indican en cada problema.

5.50 $L^{-1}\left(\log\left(\dfrac{s-3}{s+1}\right)\right)$

5.51 $L^{-1}\left(\log\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right)$

5.52 $L^{-1}\left(\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right)$

5.53 $L^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{s}{2}\right)\right)$

5.54 $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s} - \mathrm{arc\,cot}\left(\dfrac{4}{s}\right)\right)$

5.55 Demuestra el siguiente teorema:

Si f es una función de orden exponencial en $[0, \infty)$ y a es un número real no negativo, entonces:

$$L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}L(f) - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)\,dx$$

Cuando $a = 0$:

$$L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}L(f)$$

Esta fórmula se puede generalizar a:

$$L\left[\int_0^t \ldots \int_0^t f(x)\,dx \ldots dx\right] = \frac{1}{s^n}L(f)$$

5.56 Puesto que $\displaystyle\int_0^t \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{sen}(at)$ utilizando el teorema del problema 5.55, calcula $L(\mathrm{sen}\ at)$.

En los problemas 5.57 a 5.59 usa los resultados del problema 5.55 para determinar:

5.57 $L\left[\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\ \cos\ \tau\ d\tau\right]$

5.58 $L\left[\displaystyle\int_0^t \tau\ \mathrm{sen}\ \tau\, d\tau\right]$

5.59 $L\left[\displaystyle\int_0^t \tau e^{t-\tau}\, d\tau\right]$

Los problemas 5.60 a 5.63 son problemas de valor inicial, resuélvelos usando la transformada de Laplace.

5.60 $y'' - 2y' = e^t$ sen t, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5.61 $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5.62 $y''' + 2y'' - y' - 2y =$ sen $3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5.63 $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$.

T Resuelve los problemas 5.64 a 5.70, que son problemas de valor inicial, usando wxMaxima 11.04.0 y compara tus resultados usando transformadas de Laplace.

5.64 $y' - y(x - 1) = 0$ con $y(0) = 2$

5.65 $y'' + y' = 7$ con $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

5.66 $y'' + y' - y = e^x$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

5.67 $y'' + 5y' + 2y = e^x$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

5.68 $y'' + y' + 2y = x$ con $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

5.69 $y'' + y' + y = \cos x$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

5.70 $y'' + 3y' + 10y = x \cos x$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

SR **5.71** Un circuito RLC en serie tiene un resistor de 0.015 Ω, una fuente de voltaje dada por $V(t) =$ sen $110t$ V, un inductor de 0.002 H y un capacitor de $2F$; si la corriente y la carga iniciales en el capacitor son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t > 0$.

5.72 Una llanta de hule de masa 1.5 kg cuelga de un resorte una vez conseguido el punto de equilibrio, se suelta la llanta con una velocidad inicial de 5 m/s a una distancia de 0.8 m debajo de la posición de equlibrio y simultáneamente se le aplica una fuerza externa de 10 N dirigida hacia abajo (véase figura 5.15). Encontrar la ecuación de movimiento. Si la masa varía a 2 kg ¿cuál será la fuerza necesaria para recorrer la misma distancia?

PROBLEMA RETO

1 Utiliza transformadas de Laplace para determinar la carga en un capacitor de un circuito en serie (RC), cuando $q(0) = 0$, $R = 2.5$ Ω, $C = 0.08$ farads y $V(t) = 5\,u(t - 3)$.

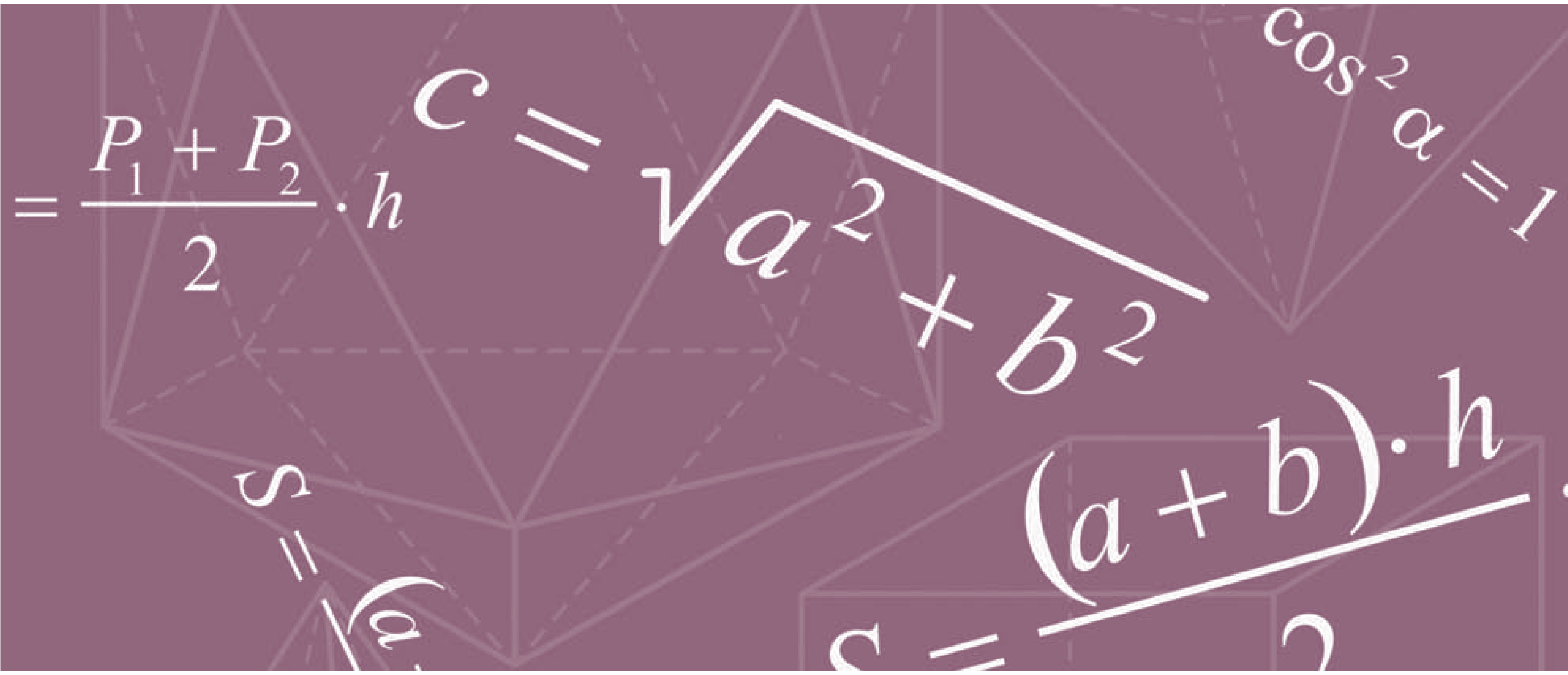
REFERENCIAS

Boyce Di Prima. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4ª edición, Limusa Wiley: México.

Spiegel, Murray R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* 3ª edición, Prentice Hall: México.

Zill, Dennis G. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. 8ª Edición, Thomson Learning Iberoamericana: México.

APÉNDICE 1



Formulario de matemáticas

Fórmulas básicas de álgebra

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$ab = ba$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Para $ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Exponentes y radicales

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

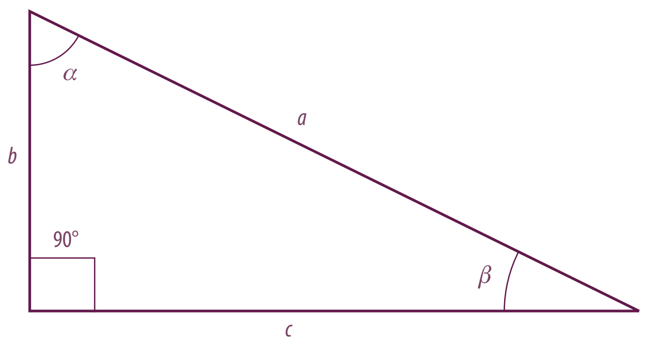
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Fórmulas básicas de trigonometría



$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$$

$$\text{cosec } \beta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{sen } \beta}$$

$$\sec \beta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\text{cotg } \beta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\tan \beta}$$

Valores de las funciones de ángulos importantes

β	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
sen β	0	0.500	0.707	0.866	0.966	1	0	–1	0
cos β	1	0.866	0.707	0.500	0.259	0	–1	0	1
tan β	0	0.577	1.000	1.732	3.732	∞	0	∞	0
cot β	∞	1.732	1.000	0.577	0.268	0	∞	0	∞

β	sen	cos
0 rad	0	1
$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0
π rad	0	–1
$\frac{3\pi}{2}$ rad	–1	0
2 π rad	0	1

Límites

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e = 2.71828...$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Cálculo diferencial

$$\frac{dc}{dx}=0$$

$$\frac{dx}{dx}=1$$

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(c\cdot v)}{dx}=c\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(v^n)}{dx}=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d(\text{sen }v)}{dx}=\cos v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(\cos v)}{dx}=-\text{sen }v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(\tan v)}{dx}=\text{sen}^2\ v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(\sec v)}{dx}=\sec v\ \tan v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(\csc v)}{dx}=-\csc v\ \cot v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(\ln v)}{dx}=\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(a^v)}{dx}=a^v\ \ln a\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(e^v)}{dx}=e^v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d(u^v)}{dx}=(v\cdot u^{v-1}+\ln u\cdot u^v)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Cálculo integral

$$\int(dv+du)=\int dv+du$$

$$\int a\ dv=a\int dv$$

$$\int dx=x+C$$

$$\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int\frac{dv}{v}=\ln|v|+C$$

$$\int a^v\,dv=\frac{a^v}{\ln a}+C$$

$$\int e^v\,dv=e^v+C$$

$$\int\ln v dv=v\ \ln v-v+C$$

$$\int\text{sen }v\ dv=-\cos v+C$$

$$\int\cos v\ dv=\text{sen }v+C$$

$$\int\sec^2 v dv=\tan v+C$$

$$\int\csc^2 v dv=-\cot v+C$$

$$\int\sec v\ \tan v\ dv=\sec v+C$$

$$\int\sec v\ dv=\ln(\sec v+\tan v)+C$$

$$\int\frac{dv}{a^2+v^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{v}{a}\right)+C$$

$$\int\frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right)+C\qquad a^2>v^2$$

$$\int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right)+C\qquad v^2>a^2$$

$$\int\frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}}=\text{arcsen}\left(\frac{v}{a}\right)+C$$

$$\int\frac{dv}{v^2\pm a^2}=\ln\left(v+\sqrt{v^2\pm a^2}\right)+C$$

$$\int\sqrt{a^2-v^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2}+C$$

$$\int udv=u\cdot v-\int udv$$